Université de M'sila(2019/2020) **Le 19/01/2020**
Département des Sciences Techniques ($1^{\text{ère}}$année ST) **Durée**: 1^h30mn

Epreuve du 1^{er}semestre
Module: **Mathématiques 01**

Exercice 01 (**5pts**)

Soit U l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-2,+\infty[$ définie par $\forall x \in, U(x) = e^x - 2$

1. Déterminer $U^{-1}(\{0\})$ et $U([0, \ln 2])$.
2. Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

Exercice 02 (**5pts**)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \dfrac{1}{a} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} + (x-a)[x] - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a \end{cases}$

$[x]$ est la partie entière de x, et a un réel positif ($a > 0$).

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur son domaine de définition D_f.
2. Pour la valeur de a trouvée dans (1). Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]0, a[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 03 (**6pts**)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(\cosh x)}{x \ln(1+x)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f
2. Déduire les valeurs $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$, $f'(0)$, $f''(0)$.
3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

Ind: $\begin{array}{l} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ... \\ \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ... \end{array}$

Exercice 04 (**4pts**)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $a * b = a + b + ab$

1. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ est un groupe.
2. Le groupe $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ est-il abélien?.