

Epreuve du 1^{er} semestre
Module: Mathématiques 01

Exercice 01(5 pts)

Soit U l'application de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ définie par $\forall x \in]0, +\infty[, U(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1. Déterminer $U^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$ et $U([2, 4])$.
2. Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

Exercice 02(5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur D_f le domaine de définition de f .
2. Etudier la dérivabilité de f .
3. Déterminer l'ensemble E des points où la fonction g définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est dérivable, et pour tout $x \in E$, exprimer $g'(x)$

Exercice 03(6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f
2. Déduire les valeurs $f'(0), f^{(2)}(0), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\text{Ind: } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Exercice 04(4pts)

On considère sur l'ensemble \mathbb{R} la loi de composition interne $*$ définie par

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe.
2. Le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est-il abélien?.