Université de M'sila(2018/2019) **Le 14/01/2018**
Département des Sciences Techniques (1$^{\text{ère}}$année ST) **Durée**: 1^h30mn

Epreuve du 1$^{\text{er}}$semestre
Module: **Mathématiques 01**

Exercice 01(5 **pts**)

Soit U l'application de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$ définie par $\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\ U(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

1.
$$\begin{aligned} U^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) &= \left\{x\in\,]0,+\infty[\,,\ U(x)\in\left]\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\} \\ &= \left\{x\in\,]0,+\infty[\,,\ \tfrac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leq\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\left[\tfrac{1}{3},3\right[\end{aligned}$$

$U\left(]2,4]\right)=\{y\in\,]0,1[\,,\ \exists x\in\,]2,4]\,,\ y=U(x)\}$
Si $2<x\leq 4$ alors $\frac{1}{\sqrt{5}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<\frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $U\left(]2,4]\right)=\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

2 Montrer que l'application U est bijective et déterminer U^{-1}

On montre que U est injective et surjective
a/ l'injectivité; soient $x,\,x'\in\,]0,+\infty[\,,$
$U(x)=U(x')\implies\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x'+1}}\implies x=x'$
alors U est injective
b/ La surjectivité, Soit $y\in\,]0,1[\,,\ y=U(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\Longrightarrow x=\dfrac{1}{y^2}-1$
alors $\forall\ y\in\,]0,1[\ \exists x=\dfrac{1}{y^2}-1\in\,]0,+\infty[$ tel que $y=U(x)$, donc U est surjective
U est injective et surjective donc elle est bijective et
$U^{-1}:\,]0,+\infty[\,\longrightarrow\,]0,1[$ définie par $U^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^2}-1$

Exercice 02(5**pts**)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur D_f le domaine de définition de f.

Sur $\mathbb{R}^*$ f est continue (raport de deux fonctions continues), en $x_0=0$ on a
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0=f(0)$, alors f est continue en 0
Donc f est continue sur $D_f=\mathbb{R}$

2 Etudier la dérivabilité de f.

Sur $\mathbb{R}^*$ f est dérivable (raport de deux fonctions dérivables), au point $x_0 = 0$ on calcule

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$
$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{y+1}-1}{y} = \frac{1}{2}$$

(par l'hopitale ou le nombre dérivé),
alors f est dérivable au point 0, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

3 Déterminer l'ensemble E des points où la fontion g définie par $g(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ est dérivable, et pour tout $x \in E$, exprimer $g'(x)$

g est la composée des fonctions ($x \longmapsto \arctan x$) qu'est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $\left(x \longmapsto \frac{x-1}{x+2}\right)$ qu'est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$
alors g est dérivable sur l'ensemble $E = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$$g'(x) = \left(\tfrac{x-1}{x+2}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2} = \frac{3}{2x^2+2x+5}$$

Exercice 03(6pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f

Le premier terme non nul dans le D.L. du dénominteur est de dégrée 2, alors on effectue le D.L. à l'ordre 4

$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \circ(x^4) = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + \circ(x^4)$$
$$e^{\cos(2x)} = e^{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\circ(x^4)} = ee^{-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\circ(x^4)}$$
$$= e\left[1 + (-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4) + \tfrac{1}{2}(-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4)^2 + \circ(x^4)\right]$$
$$= e(1 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^4) + \circ(x^4)$$
$$f(x) = \frac{e^{\cos(2x)} - e}{\ln(1+x^2)} = \frac{e(1 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^4) + \circ(x^4) - e}{x^2 - \frac{x^4}{2} + \circ(x^4)}$$
$$= \frac{e(-2 + \frac{8}{3}x^2) + \circ(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)} = e(-2 + \tfrac{8}{3}x^2)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^2)$$
$$= -2e + \tfrac{5e}{3}x^2 + \circ(x^2)$$

2 Déduire les valeurs $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

D'après la formule de Taylor on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \Longrightarrow f^{(n)}(0) = a_n.n!$
alors $f'(0) = a_1.1! = 0$, $f^{(2)}(0) = a_2.2! = \frac{5e}{3}.2! = \frac{10e}{3}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = a_0 = -2e$

3 Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0

L'équation de la tengente de la courbe de f au voisinage de 0 est $y = -2e$
On a $f(x) - y = +\frac{5e}{3}x^2 + \circ(x^2) \geq 0$ alors la courbe est en dessus de sa tengente

1. **Ind**: $$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+...\end{aligned}$$

Exercice 04(4**pts**)

On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par
Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

1. Montrer que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe.

a)L'associativité, Soient x, y, $z\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+y^3}*z &= \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3+z^3}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}\\ &= \sqrt[3]{x^3+\left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3}\\ &= x*\sqrt[3]{y^3+z^3}=\sqrt[3]{x^3+\left(\sqrt[3]{y^3+z^3}\right)^3}\\ &= x*\sqrt[3]{y^3+z^3}=x*(y*z)\end{aligned}$$

alors $*$ est associative
b/ L'élément neutre, soit $x\in\mathbb{R}$, on cherche $e\in\mathbb{R}$, tel que $x*e=e*x=x$
$x*e=x\Longrightarrow\sqrt[3]{x^3+e^3}=x\Longrightarrow x^3+e^3=x\Longrightarrow e=0$, et on a $0*x=\sqrt[3]{0^3+x^3}=\sqrt[3]{x^3}=x$
Alors $e=0$ est 'élément neutre pour la loi $*$
c/ L'inversibilité, Soit $x\in\mathbb{R}$, on cherche x' tel que $x*x'=x'*x=e$
$x*x'=e\Longrightarrow\sqrt[3]{x^3+x'^3}=0\Longrightarrow x^3+x'^3=0\Longrightarrow x'=-x$, et on a
$-x*x=\sqrt[3]{(-x)^3+x^3}=\sqrt[3]{-x^3+x^3}=0$
Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ il existe $x'=-x$ tel que $x*x'=x'*x=e$,
c'est à dire tout élément de $\mathbb{R}$ est inversible par la loi $*$
D'près a/, b/, et c/ $(\mathbb{R},*)$ est un groupe

2 Le groupe $(\mathbb{R},*)$ est-il abélien?

On a $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}=\sqrt[3]{y^3+x^3}=y*x$, la loi $*$ est commutative
alors le groupe $(\mathbb{R},*)$ est abélien.