Chapitre II
ECOULEMENT NON UNIFORME ET PERMANENT

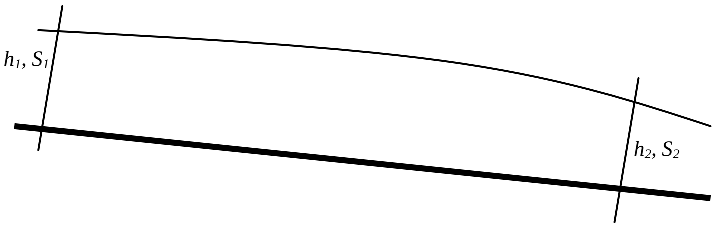
II.1 Introduction

La présence des singularités (seuil, élargissement, discontinuité,..) provoque une modification de la surface libre ; le régime est dit alors non uniforme

On distingue deux types d'écoulement non uniforme :

Ecoulement graduellement varié

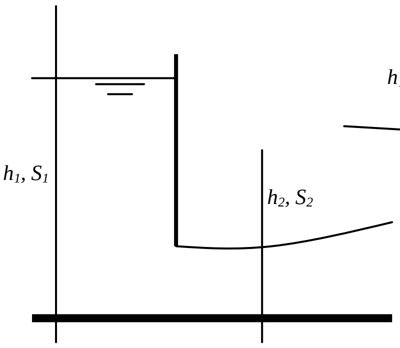
Dans ce type d'écoulement, les caractéristiques de l'écoulement changent très progressivement d'une section à l'autre

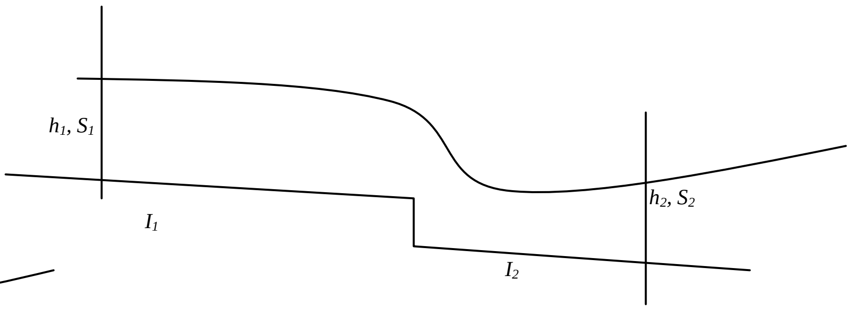


Les écoulements graduellement variés se produisent en général sur des distances importantes et conduisent à différentes formes de la surface libre appelée courbe de remous

Ecoulement brusquement varié

Dans ce type d'écoulement, les caractéristiques de l'écoulement changent brusquement d'une section à l'autre





Les écoulements rapidement variés occupent des zones relativement courtes (ressaut, chute, contraction..)

II.2 Charge spécifique

La charge ou énergie totale E dans une section par rapport au plan de référence est la somme de trois termes : la hauteur géométrique, la hauteur piézométrique et la hauteur cinétique.

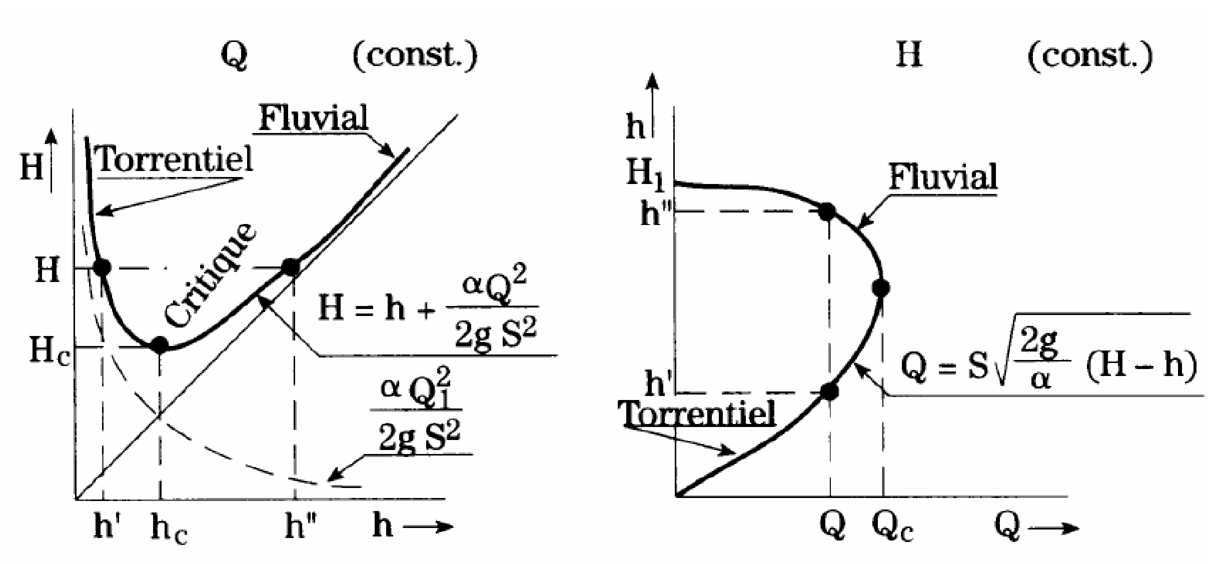
$$E = z + h\cos\theta + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

Par rapport au fond cette énergie est appelé charge ou énergie spécifique H, elle se définie comme suit

$$H = h\cos\theta + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

La charge totale E décroît toujours dans la direction de l'écoulement, par contre l'énergie spécifique H peut rester constante (dans le cas du régime uniforme), ou bien peut être croissante ou décroissante suivant les caractéristiques de l'écoulement.

L'équation de la charge spécifique H définit, pour une section donnée, un rapport entre H, h et Q valable pour n'importe quel type d'écoulement. A débit constant, H(h) ou à charge constante, h(Q) sont données par :



Pour un débit Q donné :

La fonction H=f(h) présente un minimum correspond à

$$\partial H / \partial h = \partial(h + U^2/2g)/\partial h = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{Q^2 B}{g S^3} = 1$$

Équivalent pour une section rectangulaire à

$$H_c = h_c + \frac{Q^2}{S_c^2 2g} = h_c + \frac{q^2}{h_c^2 2g} = \frac{3}{2} h_c$$

Ces deux relations correspondent au régime critique

Pour $H < H_c$ l'écoulement est impossible ;

Pour $H = H_c$ $h = h_c$; h_c est appelé profondeur critique ;

Pour $H > H_c$ il y a toujours deux solutions h_1 et h_2 : c'est-à-dire qu'un écoulement permanent peut se produire dans un canal de deux manières différentes tout en ayant la même énergie spécifique :

Ecoulement à faible profondeur et une forte vitesse $h' < h_c$ (régime torrentiel)

Ecoulement à grande profondeur et une faible vitesse $h'' > h_c$ (régime fluvial)

Les deux mêmes régimes sont identifiés en étudiant la variation de débit Q en fonction de h pour une énergie spécifique donnée

En fait, il existe une relation entre H_{min}, Q_{max} et h_c ; c'est bien la condition de criticité

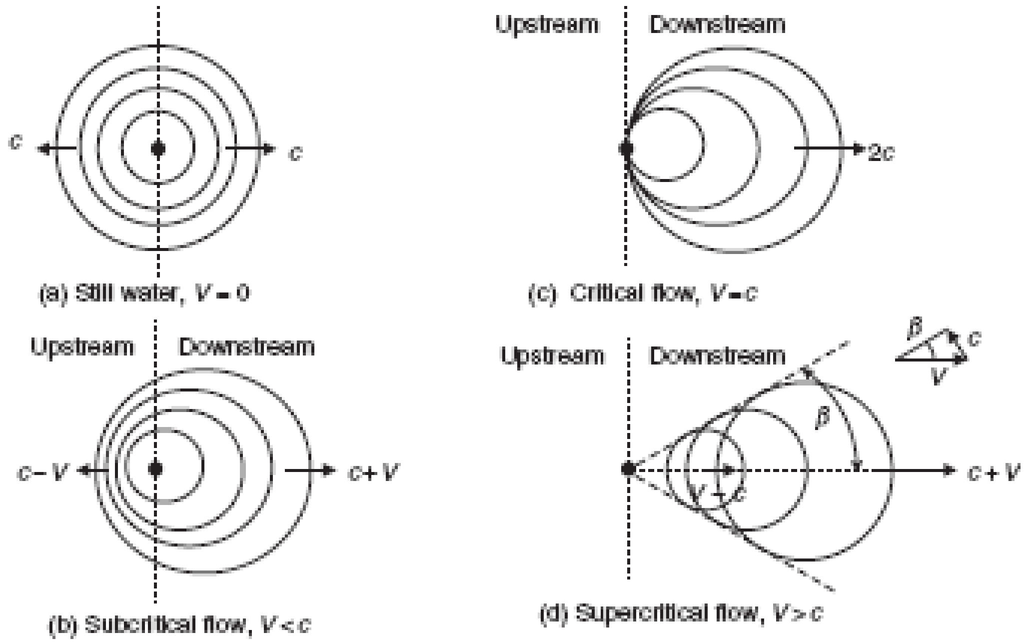
$$\frac{Q^2 B}{g S^3} = 1 = F^2 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{U}{\sqrt{gh}}$$

L'étude de la fonction F mis en évidence deux régimes d'écoulements à surface libre :

F >1 régime torrentiel

F <1 régime fluvial

F = 1 régime critique



.

$\sqrt{gh}$ représente la célérité de propagation des perturbations ou ondes de surface

II.3 La hauteur normale d'eau

La hauteur normale est, pour écoulement quelconque de débit Q donné, la hauteur d'eau h_N que l'on observerait si le régime était uniforme, c'est-à-dire sans influence ni de l'amont, ni de l'aval, comme si l'écoulement s'effectuait dans un canal uniforme de section identique à celle où la hauteur normale est calculée. Comme Q = VS, on a directement que h_N est telle que

$$Q = k_s S R_h^{1/6} J_u^{1/2}$$

II.4 La profondeur critique

C'est la profondeur d'eau qui correspond au régime critique

$$\frac{Q^2 e}{gS^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{\sqrt{g}} = S_c \sqrt{\frac{S_c}{e_c}}$$

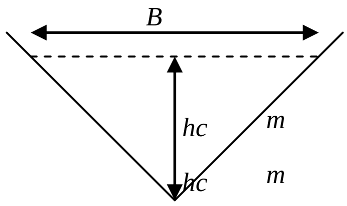
Application

La section rectangulaire

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}\ ,\ H_c = h_c + \frac{q^2}{2gh_c^2} = \frac{3}{2} h_c$$

$$H_c = h_c + \frac{Q^2}{S_c^2 2g} = h_c + \frac{q^2}{h_c^2 2g} = \frac{3}{2} h_c$$

Section triangular



S = mh_c^2

B = $2mh_c$

$$hc = \sqrt[5]{\frac{2Q}{m^2 g}}$$

$$H_c = 5/4\, h_c$$

II.5 Pente critique

La pente critique d'un canal uniforme pour un débit donné est la pente qui devrait prendre ce canal pour que la profondeur normale du courant considéré soit égale à la profondeur critique c'est-à-dire que le régime est à la fois uniforme et critique

Le régime est uniforme $Q = C\sqrt{R_h I_c}\, S$

Le régime est critique $\dfrac{Q^2 B}{g S^3} = 1$

D'où $I_c = \dfrac{gS}{C^2 R_h B}$

I_c est la pente critique (ou pente limite)

Si $I = I_c$ $\rightarrow$ $h_n = h_c$

Si $I > I_c$ $\rightarrow$ $h_n < h_c$

Le canal est dit à forte pente, et l'écoulement uniforme correspond à la profondeur normale sera en régime torrentiel ;

Si $I < I_c$ $\rightarrow$ $h_n > h_c$

Le canal est dit à faible pente, et l'écoulement uniforme correspond à la profondeur normale sera en régime fluvial

II.6 Equation de la surface libre (courbes de remous)

Pour un canal de longueur important, le problème qui se pose dans les écoulements non uniformes est de tracer la ligne d'eau pour un débit et une section transversale donnés ; c'est-à-dire déterminer pour chaque *x* la profondeur d'eau *h(x)* :

$$\frac{U^2}{2g} + h + z = H \qquad avec \qquad Q = US$$

Si on dérive la charge par rapport à *x* :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(Q/S)}{2g}\right) + \frac{dh}{dx} + \frac{dz}{dx} = \frac{dH}{dx} \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{(Q/S)}{2g}\right) + \frac{dh}{dx} - I = -J$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(Q/S)}{2g}\right) = \frac{Q^2}{2g}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S^2}\right) = \frac{Q^2}{2g}\frac{-2}{S^3}\frac{dS}{dx} = \frac{-Q^2}{gS^3}\frac{dS}{dh}\frac{dh}{dx} = \frac{-Q^2}{gS^3}e\frac{dh}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{Q^2 e}{gS^3}\right)\frac{dh}{dx} = I - J \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dx} = I\frac{(1 - J/I)}{\left(1 - \frac{Q^2 e}{gS^3}\right)}$$

La dernière équation est donc l'équation différentielle de la ligne d'eau en mouvement graduellement varié en régime permanent dans un canal prismatique. Elle définit la pente de la surface libre par rapport au fond

De l'équation différentielle nous remarquons :

dh/dx =0 si I=J alors $h_n = h_c$

dh/dx > 0 la profondeur est en croissance

dh/dx < 0 la profondeur est en décroissance

Si le dénominateur s'annule c'est-à-dire $Q^2e/gS^3 = 1$ ($F^2 = 1$) l'écoulement est critique

Nous définissons également les conventions et les symboles utilisés dans la classification des formes de la ligne d'eau :

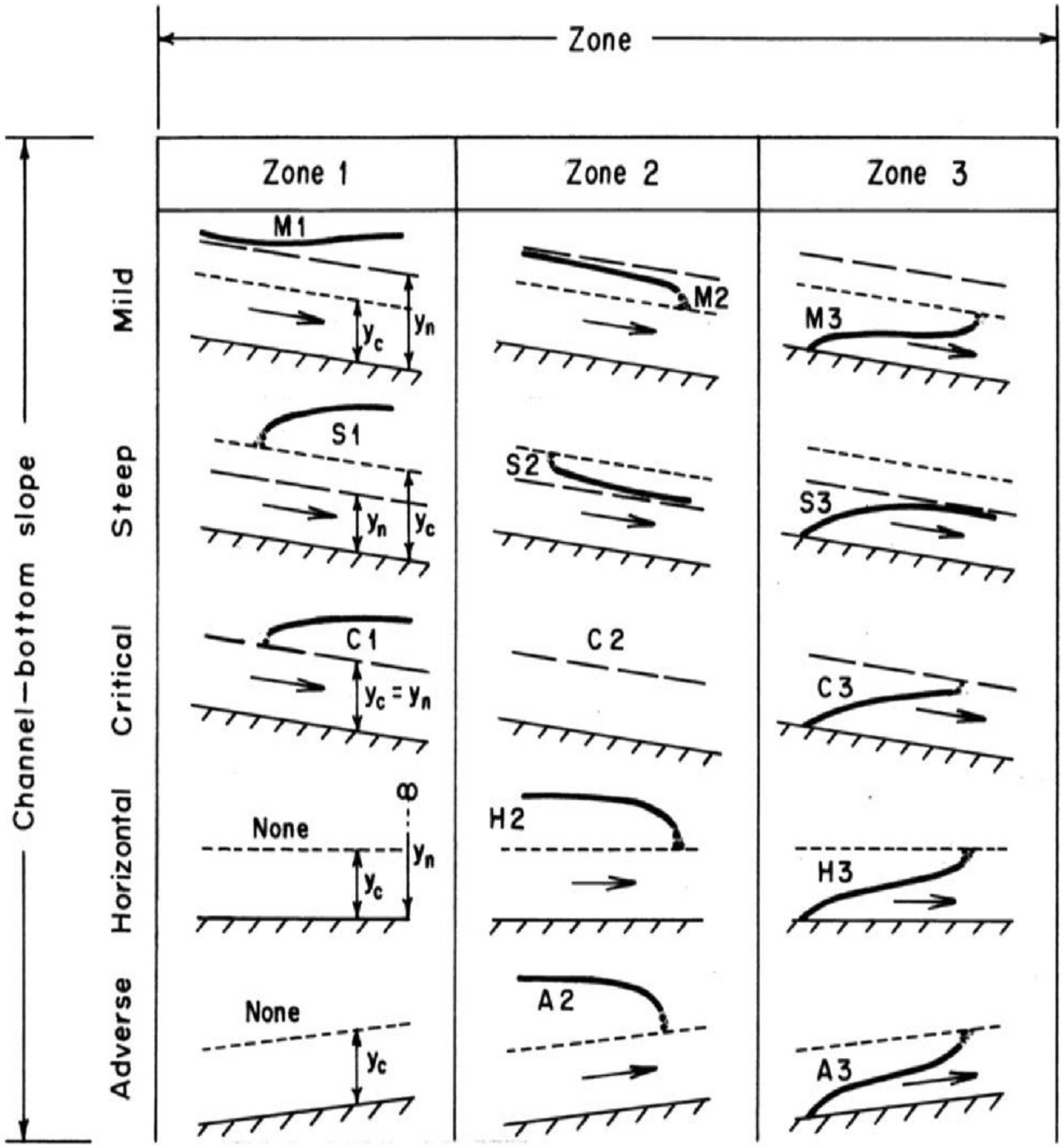
I > 0 →
- I < Ic le cours d'eau est un fleuve la ligne d'eau prend la forme **M** (*Mild slope*)
- I > Ic le cours d'eau est un torrent la ligne d'eau prend la forme **S** (*steep slope*)
- I = Ic le cours d'eau a la pente critique la ligne d'eau prend la forme **C**

I = 0 le cours d'eau est horizontal, la ligne d'eau prend la forme **H**

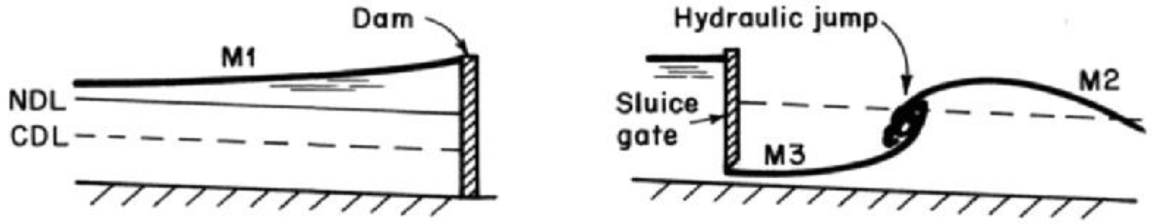
I< 0 le canal est ascendant, la ligne d'eau prend la forme **A**

- La ligne d'eau est tangente asymptotiquement à la ligne de la profondeur d'eau ($h = h_n$)
- La ligne d'eau est orthogonale à la ligne de la profondeur critique ($h = h_c$)
- Si la la profondeur d'eau h tend vers l'infini la ligne d'eau tend asymptotiquement vers une ligne horizontale

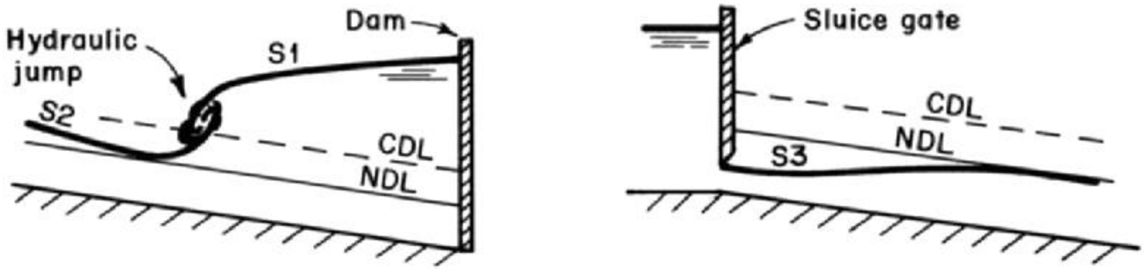
La classification des formes de la ligne d'eau



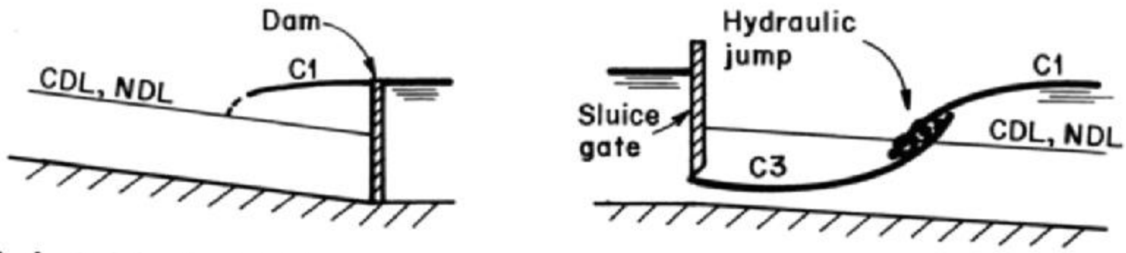
Exemples pratiques des formes de la ligne d'eau



(a) Mild slope



(b) Steep slope



(c) Critical slope

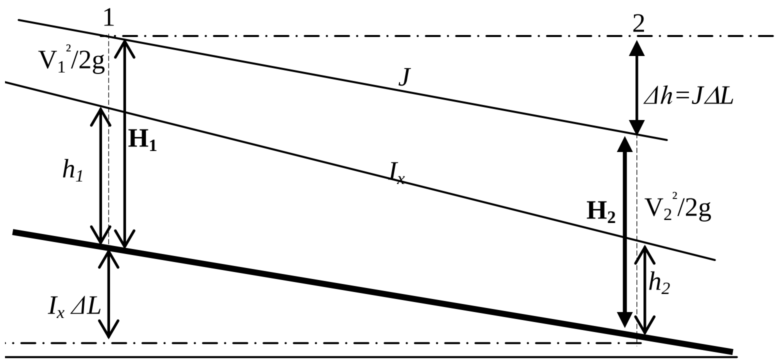
(d) Horizontal

(e) Adverse slope

II.7 Calcul de la ligne d'eau (courbe de remous)

II.7.1 Méthode par approximations successives (Direct Step Methode)

L'équation de la surface libre dans sa forme primitive entre deux points 1 et 2 très proches s'écrit



$$\frac{V_1^2}{2g} + I_x \Delta L + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + J\Delta L + h_2 \quad (*)$$

$$\Delta L = \frac{\left(\dfrac{V_1^2 - V_2^2}{2g}\right) + h_1 - h_2}{J - I_x}$$

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{n^2 Q^2}{S^2 R_h^{4/3}}$$

i) Si h_1 et h_2 sont connu le calcul ΔL se fait directement par (*) ;

ii) Si on connait h_1 et et on cherche h_2 (ou l'inverse)

* on donne une valeur initiale h_2

* on calcule J_{moy} avec les valeurs $S_{moy}=(S_1+S_2)/2$; p_{moy} et $Rh_{moy0.}$

* on calcule $\Delta L_{\text{calculé}}$

* on compare $\Delta L_{\text{calculé}}$ au $\Delta L_{\text{donée}}$; puis on corrige h2 et on refait le calcul jusqu'à la vérification ($\Delta L_{\text{calculé}}$ - $\Delta L_{\text{donnée}}$) < précision

Exemple 1

Un large canal trapézoïdale de largeur b= 18 ft avec un coefficient m = 2, de pent Ix =0.001 et un coefficient de Manning n=0.02 ; véhiculant un débit Q=800 cfs. Le canal se termine par une chute libre

Calculer le profil de la surface libre

Exemple 2

Soit un écoulement dans un canal rectangulaire (b= 3 ft, n = 0.013 et I = 0.02) sous une vanne écluse. La profondeur d'eau sous la vanne est égale à 1.30 ft et le débit est 30 cfs

Déterminer le profil de la surface la vanne après cette la vanne

II.7.2 Standard Step Method

Dans cette méthode, la profondeur d'eau est calculée dans une position donnée. Comme dans la précédente méthode, la profondeur d'eau est connue dans une position du canal étudié. De cette position, nous choisissant une distance Δx et nous calculons la profondeur d'eau à l'autre extrémité de cette distance.

En écoulement fluvial, la condition aval est souvent connue. Pour faciliter le calcul nous réarrangeant l'équation (*) comme suit :

$$\frac{V_1^2}{2g}+h_1-\frac{1}{2}(\Delta x)J_1=\frac{V_2^2}{2g}+h_2+\frac{1}{2}(\Delta x)J_2-(\Delta x)I \qquad (***)$$

Pour un débit donné, nous pouvons exprimer V_1 et J_1 en fonction de h_1. Cette dernière équation aura un seul inconnu h1. Par conséquent, l'expression est implicite de h_1 nous pouvons la résoudre par une méthode itérative. Dans l'absence de l'outil informatique pour faciliter les calculs nous suggestions de choisir la profondeur d'eau dans chaque itération comme suit

$$(h_1)_{i+1}=(h_1)_i+\Delta h_i$$

Et

$$\Delta h_i=\frac{(MD)_i-(MG)}{\left(1-F_1^2+3(\Delta x)J_1/2R_1\right)_i}$$

$(h_1)_i$ est la profondeur d'eau à l'itération i, $(MD)_i$ le membre droit de l'équation (***) dans calculée par (h_1)i F_1 est le nombre de Froude correspondant à h_1

Pour l'écoulement torrentiel, c'est la condition amont qui est souvent connue. Nous somme donc appelé à résoudre l'équation (***) itérativement pour trouver y2 d'où :

$$(h_2)_{i+1}=(h_1)_i+\Delta h_i$$

$$\Delta h_i=\frac{(MD)_i-(MG)}{\left(1-F_2^2+3(\Delta x)J_2/2R_2\right)_i}$$