TP3 : Résolution numérique d'équations différentielles

Spécialité Master1 : G01: Commande Electrique+ G02:Réseaux Electriques + G03:Energies Renouvelables + Groupe Robotique

But de TP :

L'objectif de ce TP est d'implémenter quelques méthodes de résolution numérique des équations différentielles, ou plus précisément du problème de Cauchy.

On appelle problème de Cauchy ou problème à la valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction $y(t)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y); \forall t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Durant ce TP, nous allons mettre en œuvre les algorithmes des méthodes de résolution des systèmes d'équations étudiées pendant le cours : la ***Méthode d'Euler*** et la méthode de ***Runge-Kutta d'ordre 4(RK4).***

Partie I: Méthode d'Euler

La méthode d'Euler utilise l'approximation suivante:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \\ y_0 = y(0), \qquad k = 0,1, \dots, n \end{cases}$$

1) Créer un fichier M-File nommé **Euler** et l'enregistrer.

```
function [t,y]=Euler1(f,T0,Tfinal,y0,N);
% function [t,y]=Euler(f,T0,Tfinal,y0,N) pour résoudre les EOD.
% T0 to the final time Tfinal, starting with the initial value y0 doing N steps.
h=(Tfinal-T0)/N;
y(1)=y0;
t=T0;
for i=1:N,
y(i+1)=y(i)+h*feval(f,t,y(i));
t=t+h;
end;
t=(T0:h:Tfinal)';
y=y';
```

2- L'appliquer à $\boldsymbol{f(t,y) = y}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $N = 10$ avec $y0 = 1$.

```
%L'appliquer à f(t,y) = y sur l'intervalle [0,1] pour N = 10 avec y0 = 1.
%f=@(t,y) y;
f = inline('y','t','y') ;
T=1;
y0=1;
N=10;
[t,y]=Euler1(f,0,T,y0,N)
```

Questions :

Afficher la fonction $f(t, y) = t - y$ dans l'espace de travail de Matlab en utilisant la commande **inline**

3- Tracer sur le même graphique la solution exacte Y et la solution du schéma y, définie sur les points de grille.

```
%Tracer sur le même graphique la solution exacte Y et la solution du
%schéma y, définie sur les points de grille.
Y=exp(t);
plot(t,y,'b',t,Y,'r')
legend('Solution exacte','Solution approchée par Euler')
```

Qu'est ce que vous remarquez ?!!

4- Calculer l'erreur maximale $e = max|Y(ti) - yi|$.

4. Reproduire les calculs pour $N = 10, 20, 40$. Calculer les erreurs $e1, e2, e3$.

5. Donner les différentes valeurs d'erreurs trouvées.

Quelles est votre conclusion

Partie II: Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) utilise l'approximation suivante:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ t_{k+1} = t_k + h \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{cases}$$

Résoudre numériquement par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) = \frac{t-y}{2}; \forall t \in [0,6] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Dont la solution exacte est : $y(t) = 3e^{(-t/2)} + t - 2$

1) Créer un fichier M-File nommé **RK4** et l'enregistrer.

```
%%%%%%%%%%%%%% Runge–Kutta4 %%%%%%%%%%%%%%
clear  all;
clc;
dydt = inline('(t-y)/2','t','y')
 a  =  0  ;  b  = 6  ;  n  =  60  ;  h  =(b-a)/n  ;  t = a:h:b;
u(1)  =  1 ;
 for i = 1:n-1
u1(i) = u(i)  ; u2(i) = u(i) + h/2*dydt(t(i),u1(i)) ;
u3(i) = u(i) + h/2*dydt(t(i) + h/2, u2(i)) ;
u4(i) = u(i) + h*dydt(t(i) + h/2, u3(i)) ;
u(i+1) =u(i) + h/6*(dydt(t(i),u1(i)) + 2*dydt(t(i) + h/2,u2(i))
+2*dydt(t(i) + h/2,u3(i)) + dydt(t(i+1),u4(i))) ;
  end
  time=t(1:end-1);
 plot( time,u,'o-b',time,3*(exp(-time/2))+time-2,'g')
```

2) A votre avis qu'elle est la méthode d'approximation la plus exacte? Justifier

……

Refaire pour le même exemple en utilisant l'algorithme d'Euler

```
clear  all;
clc;
dydt = inline('(t-y)/2','t','y')

a  =  0  ;  b  = 6  ;  n  =  60  ;  h  =(b-a)/n  ;  t = a:h:b;
  u(1)  =  1  ;
  for  i  =  1:n-1
      u(i+1)  =u(i)  +  h/2*(dydt(t(i),u(i)))  ;
  end
 hold  on
time=t(1:end-1);
 plot( time,u,'o-b',time,3*(exp(-time/2))+time-2)
```

4) Tracer sur le même graphe la solution obtenue par Euler et Runge-Kutta, d'ordre 4

5) Conclusion :
………………………………………………………………………………………………………