Université de M'sila
Faculté de technologie
Département de génie électrique

année universitaire 2020/2021
domaine : ST
module : ondes et vibrations

Série de révision

التمرين الأول

تتمفصل ساق معدنية طولها l وكتلتها مهملة عند النقطة O وتحمل في نهايتها الطليقة كتلة نقطية m . نربط الساق عند النقطة a بنابض شاقولي ثابت مرونته k ومثبت بنهايته الأخرى بمسند ثابت A (الشكل1) عند التوازن السكوني تأخذ الساق وضعا أفقيا $(\theta = 0)$

1- هل النابض في هذا الوضع مستطيلا أو مرتخيا؟استنتج شرط التوازن.

2- جد المعادلة التفاضلية للاهتزازات صغيرة السعة ثم استنتج الدور.

تتلقى الجملة الاحتكاك اللزج للهواء والذي نمثله على شكل مخمد شاقولي معامل احتكاكه الخطي α يؤثر في النقطة b من الساق.

جد المعادلة التفاضلية للحركة صغيرة السعة $(\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx 1)$ ثم حدد من أجل أي قيمة لـ α يمكن أن نشاهد اهتزازات متخامدة في النظام.

نطبق على الكتلة m قوة شاقولية من الشكل : $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ (Ω قابل للتعديل). علما أن m=2kg و k=250N/m و $\alpha = 5N.m^{-1}.s$.هل يمكن مشاهدة الرنين؟

إذا كان كذلك فجد قيمة Ω التي من أجلها يحدث الرنين.أحسب إذن السعة العظمى في هذه الحالة.

ملاحظة : نأخذ oa=l/4 ob=3l/4

Exercice N°1

Une tige de longueur *l* et de masse négligeable articulée au point *O* portant à son extrémité libre une masse ponctuelle *m*. A une distance a de *O* de la tige on attache verticalement un ressort de raideur *k*, l'autre extrémité étant fixée à un bâti fixe au point *A(fig.1)*. A l'équilibre statique la tige prend une position horizontale $\theta = 0$.

1- Dire si à cette position le ressort est-il allongé ou non ? en déduire la condition d'équilibre.

2- Etablir l'équation différentielle des faibles oscillations et en déduire leur période.

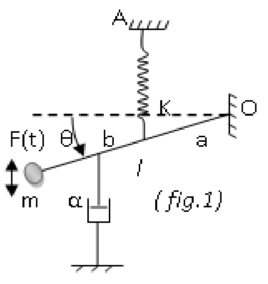
Le système subit l'action des frottements visqueux de l'air, représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α, appliqué verticalement au point b de la tige.

Déduire alors l'équation différentielle régissant les mouvements de faibles amplitudes ($\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$) et dire pour quelle valeur de α peut-on observer des oscillations amorties ?

On applique à la masse m une force verticale de forme $F(t) = F_0 \, cos\, \Omega t$ (Ω ajustable). Sachant que m=2kg, k=250N/m et $\alpha = 5N.m^{-1}.s$ peut-on observer la résonnance ?

Si oui pour quelle valeur de Ω ? Calculer alors l'amplitude correspondante.

Req : on prend $oa = {}^{l}/_{4}$ et $ob = {}^{3l}/_{4}$



التمرين الثاني

دارة كهربائية RLCعلى التسلسل تتركب من وشيعة ذاتيتها $L = 10mH$ و مكثفة سعتها $C = 1425nF$ ومقاومة متغيرة R. نصل طرفي المكثفة بمدخل راسم الاهتزاز، فنشاهد على شاشته اهتزاز جيبي متخامد. نقيس سعتين عظميين للتوتر يفصل بينهما فارق زمني مقداره $3.75ms$ يساوي إلى خمسة أدوار كاملة من الاهتزاز، فنجد $V_n = 5.18V$ و $V_{n+5} = 2.5V$.

1- أحسب التناقص اللوغرتمي D والمقاومة R .

2- ما هي القيمة R_c للمقاومة R التي من أجلها تختفي الاهتزازات على الشاشة؟

نغذي الدارة بتوتر جيبي من الشكل: $e(t) = E_0 \, cos\, \Omega t$ (Ω قابل للتعديل و$E_0 = 3V$). نسجل من الشاشة قيمة عظمى للتوتر بين طرفي المكثفة يقدر بـ $V_r = 60V$. ماذا تمثل النسبة ${}^{V_r}/_{E_0}$. هل النتيجة تتوافق مع القيمة المحسوبة سابقا للمقاومة R.

Exercice N°2

Un circuit RLC série comprend une self-inductance $L = 10\mathrm{mH}$, une capacité $C = 1425\mathrm{nF}$ et une résistance variable R. Les bornes de la capacité sont reliées à l'entrée d'un oscilloscope sur l'écran duquel on observe une sinusoïde amortie. On mesure les tensions correspondants à deux crêtes de même signe et séparées par un temps de 3.75 ms égale à 5 périodes d'oscillation on trouve $V_n = 5.18\mathrm{V}$ et $V_{n+5} = 2.5\mathrm{V}$.

1- Calculer le décrément logarithmique D et la valeur de la résistance R.
2- Pour quelle valeur R_c de R les oscillations disparaissent-elles sur l'écran ?
3- On branche aux bornes du circuit une source de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos \Omega t$ (Ω ajustable et$E_0 = 3\mathrm{V}$). On enregistre une amplitude maximale pour la tension aux bornes de C ; $V_r = 60\mathrm{V}$. Que représente le rapport ${V_r}/{E_0}$. Le résultat est-il en concordance avec la valeur de R calculée précédemment ?

التمرين الثالث (الإقتران بالمرونة fig.2)

نواسان بسيطان لهما نفس الطول l لكن ذو كتلتين مختلفتين ($m_2 < m_1$) يهتزان حول محوريهما O_1 وO_2 (اهتزازات صغيرة السعة).
النواسان مقترنان بواسطة نابض ثابت مرونته K كما يوضح الشكل في الأسفل.

1- جد المعادلات التفاضلية للحركة.
2- قم باستبدال المتغيرين حسب: $\theta_1 = \beta_1 + \beta_2$ و $\theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$.
3- أعط إذن عبارة النبضين الذاتيين Ω_1 وΩ_2 و الحل العام لحركة النظام علما أن في اللحظة $t = 0$ لدينا:

$$\theta_1(0) = \theta_0 \; ; \; \dot{\theta}_1(0) = 0 \; ; \theta_2(0) = 0 \; ; \; \dot{\theta}_2(0) = 0$$

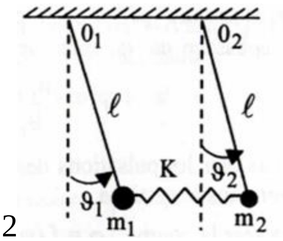


fig. 2

Exercice N°3 *(*couplage par élasticité) fig. 2

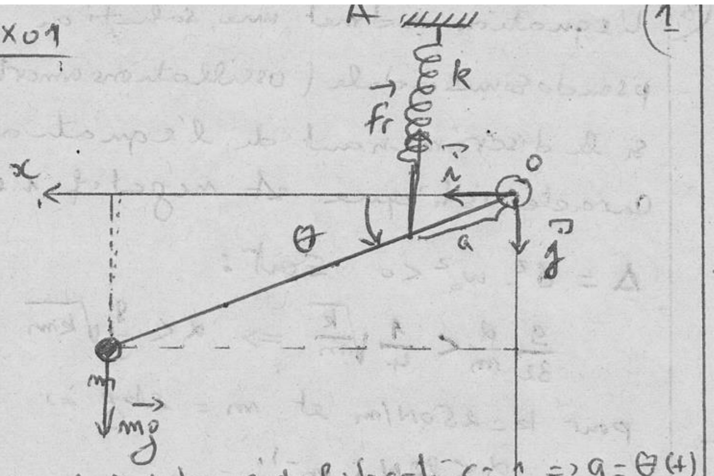
Deux pendules de même longueur l mais de masses différentes ($m_1 > m_2$) oscillent autour de leurs axes respectifs $O_1 et\, O_2$ (faibles amplitudes) en étant couplés par un ressort de raideur K disposé selon la figure ci-dessus.

1- Etablir les équations différentielles du mouvement du système.
2- Faire le changement de variables suivant : $\theta_1 = \beta_1 + \beta_2 \; et \; \theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$
3- Donner alors les pulsations propres $\Omega_1 et\, \Omega_2$ du système ainsi que la solution générale du mouvement sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ on avait :

$$\theta_1(0) = \theta_0 \; ; \; \dot{\theta}_1(0) = 0 \; ; \theta_2(0) = 0 \; ; \; \dot{\theta}_2(0) = 0$$

Solution

EX01



syst à 1 degré de liberté s=1 => q=θ(t)

1- Oscillations libres non-amorties

Expression de la force généralisée f_θ

$$f_\theta = f_\theta(m\vec g) + f_\theta(\vec{f_r}) = \frac{\delta W(m\vec g)}{\partial\theta} + \frac{\delta W(\vec{f_r})}{\partial\theta}$$

$m\vec g = mg\vec j$ et $\vec{f_r} = -k(a\sin\theta+\Delta l)\vec j$

alors:

$$f_\theta = mg\vec j\cdot\frac{\delta \vec{r_m}}{\partial\theta} + k(a\sin\theta+\Delta l)\vec j\cdot\frac{\delta\vec{r_k}}{\partial\theta}.$$

$\vec{r_m} = l(\cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j)$

$\vec{r_k} = a(\cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j)$

donc: $\frac{\delta\vec{r_m}}{\partial\theta} = l(-\sin\theta\,\vec i+\cos\theta\,\vec j)$

et $\frac{\delta\vec{r_k}}{\partial\theta} = a(-\sin\theta\,\vec i+\cos\theta\,\vec j)$

$$\Rightarrow f_\theta = mgl\cos\theta - k(a\sin\theta+\Delta l)a\cos\theta$$

pour les oscillations de faibles amplitudes:

$$f_\theta = mgl - ka(a\theta+\Delta l)$$

f_θ : force dérivant du potentiel $U(\theta) \Rightarrow f_\theta = -\frac{dU}{d\theta}$

En intégrant f_θ par rapport à θ

$$U(\theta)-U(0) = \int_0^\theta [(-mgl+ka\Delta l)+ka^2\theta]\,d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{U(\theta) = \frac{1}{2}ka^2\theta^2+(ka\Delta l - mgl)\theta + U(0)}$$

à l'$\rightleftharpoons$ on a : ... (1)

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \boxed{ka\Delta l - mgl = 0}$$

c'est la condition d'équilibre dont l'interprétation est que la somme des moments de $\vec{f_r}$ et $\vec P$ à l'$\rightleftharpoons$ est nulle.

de (1) on tire : $\Delta l = \frac{mgl}{ka} > 0$

i.e : le ressort est allongé de $\frac{mgl}{ka}$ à l'$\rightleftharpoons$.

En tenant compte de (1) : U(θ) devient:

$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2}ka^2\theta^2}$ (U(0) = 0 origine des potentiels)

Extraction de l'équation diff :

Equation de Lagrange pour un syst libre non-amorti : $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ avec

$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T-U$

$T = \frac{1}{2}J_m\dot\theta^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2$

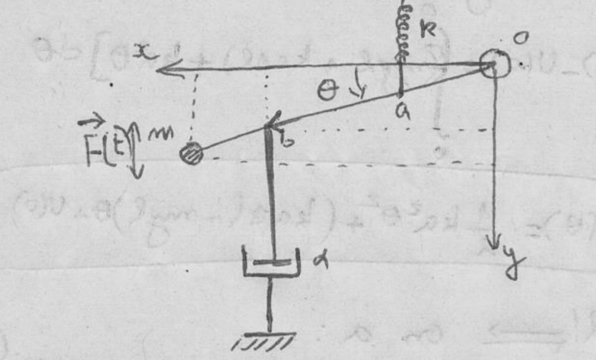
donc : $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}ka^2\theta^2$

après dérivation on trouve:

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0}$$

donc la pulsation propre est $\omega_0 = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

3- Etude des oscillations amorties: (3)



L'equation de Lagrange en présence de la force d'amortissement visqueux est:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

où:

D = fonction dissipation et est définie par:

$D = \frac{1}{2} P_d$ avec P_d = puissance dissipée

et comme: $P_d = -\frac{\delta W(\vec{f}_f)}{\partial t}$

alors:

$$D = -\frac{1}{2}\vec{f}_f \cdot \frac{\delta \vec{ob}}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\delta \vec{ob}}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha b^2 \dot{\theta}^2$$

avec $b = \|\vec{ob}\| = \frac{3}{4} l$

Req: $\vec{ob} = b(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$ d'où

$$\left(\frac{\delta \vec{ob}}{\partial t}\right)^2 = b^2(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})^2 \dot{\theta}^2 = b^2\dot{\theta}^2$$

et d'aprés les resultats précédents dans la partie 1 et 2 de l'exercice alors l'equation différentielle sera:

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{9}{16}\frac{\alpha}{m}\right)}_{2\delta}\dot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{1}{16}\frac{k}{m}\right)}_{w_0^2}\theta = 0$$

c'est une équation differentielle linéaire du $2^{ème}$ ordre et de coefficient positifs et constants.

L'equation admet une solution pseudosinusoidale (oscillations amorties) si le discriminant de l'equation caracteristique est négatif i.e:

$\Delta = \delta^2 - w_0^2 < 0$ Soit:

$$\frac{9}{32}\frac{\alpha}{m} < \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha < \frac{8}{9}\sqrt{km}$$

pour $k = 250 N/m$ et $m = 2kg \Rightarrow$

$\alpha < 20 N.s.m^{-1}$.

4- L'equation de Lagrange en presence de la force excitatrice $f(t)$ est:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = f_\theta(t)$$

avec:

$$f_\theta(t) = \frac{\delta W(\vec{F}(t))}{\partial \theta} = \vec{F}(t) \cdot \frac{\delta \vec{om}}{\partial \theta}$$

$\vec{om} = l(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) \Rightarrow f_\theta(t) = F(t) l \cos$

$\Rightarrow \frac{\delta \vec{om}}{\partial \theta} = l(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})$

et comme $\cos\theta \simeq 1$ alors:

$f_\theta(t) \simeq l F(t) = l F_0 \cos\Omega t$

donc l'equation diff sera:

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + w_0^2\theta = \frac{F_0}{ml}\cos\Omega t$$

4-a. le système résonne si:

$0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $\xi = \delta/w_0$

or nous avons éffectivement:

$$\frac{9}{8}\frac{\alpha}{\sqrt{km}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0,25 < 0,70)$$

donc la résonance peut avoir lieu

4-b. La résonance aura lieu pour

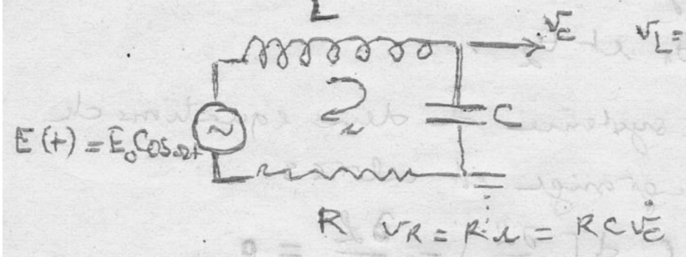
$\Omega_R = w_0\sqrt{1 - 2\xi^2} = \boxed{10,45 \text{ rad } s^{-1}}$

4-c. L'amplitude $(\theta_0)_{max}$ à la résonance est obtenue pour:

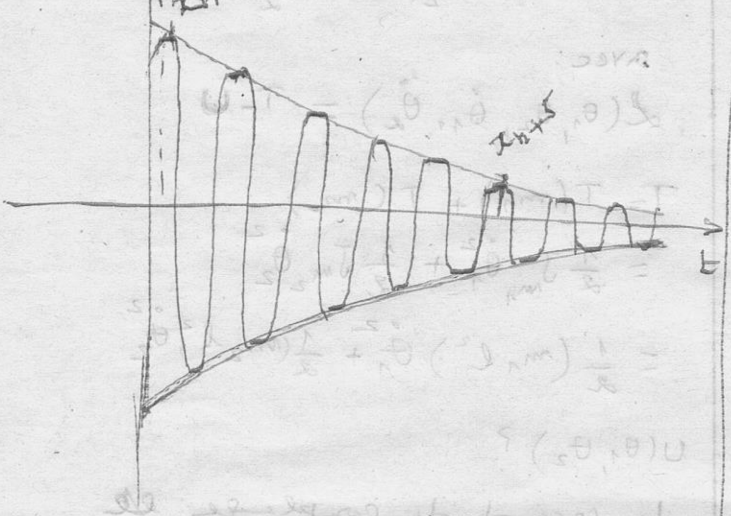
$$\left.\frac{d\theta_0}{d\Omega}\right)_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \theta_{0max} = \frac{F_0/ml}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega_R^2)^2 + (2\delta\Omega_R)^2}}$$

$\Rightarrow \boxed{\theta_{0max} = 0,023\frac{F_0}{l}}$

Exo2



1- Calcul du décrément logarithmique D : $D = \delta T_a = 2\pi\delta/\omega_a$



$\sum v_i = 0 \Rightarrow v_C + v_L + v_R = 0 \Rightarrow$

$v_C + LC\ddot{v}_C + RC\dot{v}_C = 0 \Rightarrow \ddot{v}_C + \frac{R}{L}\dot{v}_C + \frac{1}{LC}v_C = 0$

$2\delta = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$.

L'oscilloscope montre que v_C est une sinusoïde amortie alors :

$v_C(t) = C e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

avec : $\xi = \delta/\omega_0$ $(0 < \xi < 1)$.

$$\frac{x_n}{x_{n+5}} = \frac{C e^{-\delta t_n}\cos(\omega_a t_n + \varphi)}{C e^{-\delta t_{n+5}}\cos(\omega_a t_{n+5} + \varphi)}$$

et comme : $t_{n+5} - t_n = 5T_a$ alors

$t_{n+5} = t_n + 5T_a$

et $5T_a = 3{,}75\,ms \Rightarrow T_a = \cancel{0{,}75}\,ms = 0{,}75\,ms$

donc :

$$\frac{x_n}{x_{n+5}} = \frac{C e^{-\delta t_n}\cos(\omega_a t_n + \varphi)}{C e^{-\delta t_n}\cdot e^{-\delta 5 T_a}\cos(\omega_a t_n + \varphi + \omega_a 5 T_a)}$$

avec : $5\omega_a T_a = 5(2\pi) = 10\pi$.

$\Rightarrow \cos(\omega_a t_n + \varphi + 10\pi) = \cos(\omega_a t_n + \varphi)$

alors :

$$\frac{x_n}{x_{n+5}} = \frac{\cancel{C e^{-\delta t_n}}\cancel{\cos(\omega_a t_n + \varphi)}}{\cancel{C e^{-\delta t_n}}\, e^{-\delta 5 T_a}\cancel{\cos(\omega_a t_n + \varphi)}}$$

$= e^{+5D} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+5}}\right) = 5D$

$\Rightarrow D = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+5}}\right)$

d'où

$D = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5{,}18}{2{,}5}\right) = 0{,}146$

$D = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{R}{2L} = \frac{D}{T_a} =$

donc : $R = 2L\frac{D}{T_a} = \boxed{3{,}88\ \Omega}$

2- Les vibrations amorties disparaissent de l'écran quand :

$\Delta_c = 0 \Rightarrow \delta_c = \omega_0 \Rightarrow \frac{R_c}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\Rightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = \boxed{1675\ \Omega}$

3- L'éq diff du circuit forcé :

$\ddot{v}_C + 2\delta\dot{v}_C + \omega_0^2 v_C = \omega_0^2 E(t)$

avec $E(t) = E_0\cos\Omega t$

alors v_C sera de la forme :

$v_C(t) = v_0\cos(\Omega t + \theta)$

méthode des nombres complexes donne :

$$v_0 = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$$

v_r valeur à la résonance pour $\Omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$

donc :

$$v_r = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_r^2)^2+(2\delta\Omega_r)^2}}$$

$$= \frac{E_0}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{Q E_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$$\simeq Q E_0$$

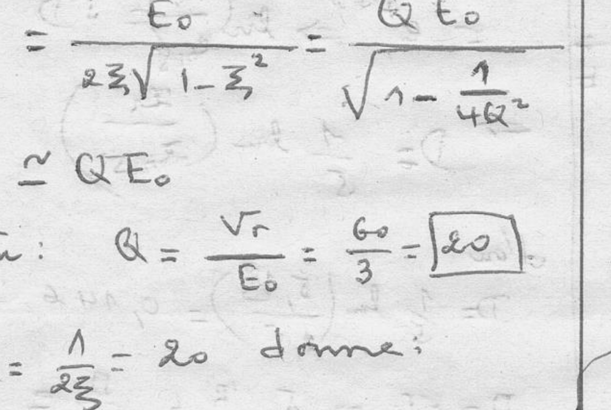
d'où : $Q = \frac{V_r}{E_0} = \frac{60}{3} = \boxed{20}$

$Q = \frac{1}{2\xi} = 20$ donne :

$$\boxed{R = 4{,}18\,\Omega}$$

La différence est due aux erreurs de mesure de Ta et V_0

EX 03



système à deux degrés de liberté :

$S = 6 - 4 = 2$ degrés de liberté ;

$$4\begin{cases} z_1 = z_2 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = l^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = l^2 \end{cases}$$ donc 4 liens

Visiblement les 2 coordonnées généralisées convenables sont : θ_1 et θ_2.

Le système de deux équations de Lagrange est alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_1}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2) = T - U$$

$$T = T(m_1) + T(m_2)$$
$$= \frac{1}{2} J_{m_1}\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_{m_2}\dot\theta_2^2$$
$$= \frac{1}{2}(m_1 l^2)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l^2)\dot\theta_2^2$$

$U(\theta_1, \theta_2)$?

le ressort de couplage se déforme de ses deux extrémités alors :

$$\vec{F_r} = -K(x_1 - x_2) = -Kl(\theta_1 - \theta_2)\vec{j}$$

donc :

$$U(\theta_1,\theta_2) = \underbrace{U_{m_1}}_{\text{gravi}} + \underbrace{U_{m_2}}_{\text{gravi}} + \underbrace{U_K}_{\text{élastique}}$$

$U_{m_1} = m_1 g l(1 - \cos\theta_1)$ $\quad \cos\theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$

$U_{m_2} = m_2 g l(1 - \cos\theta_2)$ $\quad \cos\theta_2 = 1 - \frac{\theta_2^2}{2}$

$$U_K = \frac{1}{2} K l^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\Rightarrow U(\theta_1,\theta_2) \simeq \frac{1}{2} m_1 g l\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l \theta_2^2 + \frac{1}{2} K l^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\Rightarrow U(\theta_1,\theta_2) \simeq \frac{1}{2}(m_1 g l + Kl^2)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 g l + Kl^2)\theta_2^2 - Kl^2\theta_1\theta_2$$

alors l'expression de $\mathcal{L}$ sera :

$$\ell(\theta_1,\theta_2,\dot\theta_1,\dot\theta_2) = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot\theta_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 g l + K l^2)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(m_2 g l + K l^2)\theta_2^2 + \underbrace{K l^2 \theta_1 \theta_2}_{\text{terme de couplage}}$$

Après dérivation (attention aux dérivées partielles) on obtient :

$$\ddot\theta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m_1}\right)\theta_1 - \frac{K}{m_1}\theta_2 = 0$$

$$\ddot\theta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m_2}\right)\theta_2 - \frac{K}{m_2}\theta_1 = 0$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\theta_1 = \beta_1 + \beta_2$$

et $\theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_2$

on aura :

$$\begin{cases} \ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2 + \ddot\beta_2 = 0 \ldots (1) \\ \ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 - \frac{m_1}{m_2}\left[\ddot\beta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2\right] = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

avec : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

On appelle μ masse réduite.

(1) + (2) et (1) − (2) donnent :

$$\ddot\beta_1 + \frac{g}{l}\beta_1 = 0 \ldots (3)$$

$$\ddot\beta_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{\mu}\right)\beta_2 = 0 \ldots (4)$$

2 équations différentielle découplées. On appelle β_1 et β_2 les coordonnées normales du système.

Donc les 2 pulsations propres du système sont : $\Omega_1 = \sqrt{g/l}$

$$\Omega_2 = \sqrt{g/l + \frac{K}{\mu}}$$

(3) et (4) admettent des solutions sinusoïdales, donc

(3) $\Rightarrow$ $\beta_1 = \beta_{01}\cos\left(\sqrt{g/l}\, t + \varphi_1\right)$

(4) $\Rightarrow$ $\beta_2 = \beta_{02}\cos\left(\sqrt{g/l + \frac{K}{\mu}}\, t + \varphi_2\right)$

En se rapportant aux expressions de changement de variables de θ_1 et θ_2, on en déduit :

$$\theta_1(t) = \beta_{01}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \beta_{02}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_2(t) = \beta_{01}\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{m_1}{m_2}\beta_{02}\cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

En appliquant les C.I on trouve :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \beta_{01}\cos\varphi_1 + \beta_{02}\cos\varphi_2 = \theta_0 \\ \dot\theta_1(0) = -\beta_{01}\Omega_1\sin\varphi_1 - \beta_{02}\Omega_2\sin\varphi_2 = 0 \\ \theta_2(0) = \beta_{01}\cos\varphi_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_{02}\cos\varphi_2 = 0 \\ \dot\theta_2(0) = -\beta_{01}\Omega_1\sin\varphi_1 - \frac{m_1}{m_2}\beta_{02}\Omega_2\sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Un système de 4 équations à 4 inconnues dont la solution est :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

et $\beta_{01} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\theta_0$, $\beta_{02} = \frac{m_2\theta_0}{m_1 + m_2}$

finalement :

$$\theta_1(t) = \mu\theta_0\left[1/m_2 \cos\Omega_1 t + \frac{1}{m_1}\cos\Omega_2 t\right]$$

$$\theta_2(t) = \mu\theta_0\left[\frac{1}{m_2}\cos\Omega_1 t - \frac{1}{m_2}\cos\Omega_2 t\right]$$