المحاضرة رقم: 01

المنطق الرياضي: (التعريف، النشأة، الخصائص...)

يثير "أرسطو طاليس" نوعا من الجدل بين مؤرخي الفكر الرياضي ذلك أنه لم يهتم به بصفة مباشرة، فنحن لا نكاد نعثر في نسقه على مكانة مميزة للرياضيات سواء من حيث مناهجها النظرية أو طرق استعمالها العملية مقارنة بأستاذه "أفلاطون"، إذ تبدو الرياضيات من بين علوم أرسطو النظرية الأقل حظا في إنتاجه العلمي، فهو لم يخصص لها بحثا مستقلا وكأنه لا يعتبرها في مكانة الميتافيزيقا أو الفيزيقا.

حيث يستشف تحامل بعض مؤرخي الفكر على"أرسطو" في وصفهم لموقفه من الرياضيات وتمجيدهم لموقف "أفلاطون" منها، إلا أن هناك من اتخذ وجهة أخرى وأثبت وجود نوع من الفلسفة الرياضية في النسق الأرسطي من خلال قوله العلمي، ذلك أن الرياضيات بوصفها أنموذج البساطة والضبط تمثل عند "أرسطو" الحقيقة العلمية التامة من حيث الصورة على الأقل وهذا ما يؤكده "هيث" في كتابه: "تاريخ الرياضيات اليونانية "حيث يخصص له عملا منفردا بعنوان "الرياضيات في أعمال أرسطو" وكذا الحال بالنسبة لـ "بول تانوري" في "مذكراته العلمية" و"هنري كارتورن" في كتابه "مفهوم القوة في نظام أرسطو" و"مانسيون" في "مدخل إلى الطبيعيات الأرسطية".

ما يهمنا ليس هو مناقشة الردود التي آخذ بها تحامل كل من الرافضين أو المؤيدين لهذه الفرضية (وجود نوع من التأسيس الرياضي في النسق الأرسطي)، ذلك أن المعروف عند مؤرخي الفلسفة هو أن "أرسطو" كان بصدد نقد نظرية المثل الأفلاطونية من أجل بناء فلسفة منطقية تقوم على نظرة واقعية، إنما الجانب المهم هو معرفة علاقة النسق الفلسفي لأرسطو برياضيات عصره. حيث أن المنطقي البولندي المعاصر "يان لوكازيفيتش" في مؤلفه "نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصوري الحديث"، يؤكد وجود نوع من النزعة الرياضية المبطنة في منطق أرسطو، حيث يرى أنه استخدم البرهنة الرياضية في حساب العلاقات القضوية، جاعلا من منطقه نظاما أكسيوميا مماثلا لكل نظام رياضي.

• **ليبنيتز وارهاصات المنطق الرياضي:** يعد "ليبنيتز" من ورثة الفلسفة الديكارتية، وتندرج فلسفته في صلب الفلسفة العقلية، حيث يذهب إلى أن المعرفة يجب أن تتسم بصفة الضرورة والكلية، والهدف منها الوصول إلى مذهب شامل، يتضح معناه في إيجاد علم كلي بواسطة حساب فلسفي أو حساب كلي يمثل منهج البحث المناسب. من هنا يلاحظ "ليبنيتز" بأن أحسن المناهج وأوثقها هي مناهج الجبر، لأن هاته الأخيرة ترمز إلى الفكرة بواسطة رموز ثابتة تعبر عنها تعبيرا واضحا، والمعادلات الجبرية بهذا الشكل تثير انتباهنا وتجعلنا في فطنة ويقظة، وكما ساعدنا الجبر في فهمنا للهندسة كذلك يمكننا أن نتخذه للتعبير عن أفكارنا.

وقد حدد "ليبنيتز" منهجه ومذهبه، وهذا ما يتجلى في عبارة مأثورة له فحواها كما نقلها لنا "يوسف كرم" مايلي: **"لقد تأثرت بمنهج جديد، ومنذ ذلك الحين أضنني أرى وجها جديدا لباطن الأشياء"**، وقد برزت هذه النزعة عند "ليبنيتز" عندما اطلع على المؤلفات الرياضية التي كانت موجودة آنذاك، فخطر له أن يبحث عن المعاني البسيطة والأولية التي ترتد إليها التصورات أو الأفكار، فكان أن أعلن عن مشروع الحساب الفكري الذي يهدف إلى إقامة أبجدية الفكر.

لعل هذه النزعة الجديدة اختلطت عند "ليبنيتز" بالمنطق الذي بقي عنده يتمسك بضرورة الموضوع والمحمول، بالرغم من أنه أضاف الاهتمام بالاستدلال الرياضي الذي يساعدنا على تحليل وتركيب أفكارنا، فالتحليل يشمل الحقائق الضرورية والعرضية، وبذلك يكون قد أقام نسقا منطقي استنباطي مثله مثل علم الحساب أو الهندسة. وذلك بإدراج القضايا من مجموع تعريفات دون الحاجة إلى مبادئ أو مصادرات فلجأ بذلك إلى استخدام حروف الهجاء كرموز إلى الحدود، فضلا عن استخدام علامات الحساب كثوابت، هذا ما يجسد في حقيقة الأمر مسعى ليبنيتز لإخضاع الحدود التي نستخدمها في القضايا لحساب دقيق كالذي نراه قائما بين الرموز الرياضية في علم الجبر (+، −، ×، =) ولو دققنا النظر في مدى دقة الحساب لاستطعنا أن نعرف مبتغى "ليبنيتز" منها.

وبهذا الشكل يتبنى "ليبنيتز" الطريقة التي تأخذ بالنظام الرياضي الذي ينطلق من معطيات يتقبلها الذهن ويراعي فيها صحتها، بهذا يكون قد وضع نفسه على الطريق الذي يأخذ لمسار

المنطق الرياضي وإلى الهندسات اللاإقليدية، وهذا من منطلق أن نسقه الفكري يراعي الارتباطات الممكنة للتصورات بالمضمون الواقعي الذي تحتويه. لقد طمح "ليبنيتز" للوصول إلى لغة رياضية شاملة، وبالرغم من صعوبة التصور الذي تبناه "ليبنيتز"، إلا أن مبتغاها يكشف عن رغبة جامحة تمثلت في تطوير العلوم والمعارف وفق الحساب الرياضي والتي أدت إلى تغير معالم المنطق الصوري والرياضيات الكلاسيكية، إذ تخلص المنطق معه من اللغة الطبيعية المفرطة التي تستغرق زمنا كبير في الوصول إلى النتائج التي تصبو إليها القضايا فبدلا منها تم استغلال الرموز في التعبير عن قضايا الفكر أما بالنسبة للرياضيات الكلاسيكية (الهندسة الإقليدية) فقد زالت عنها تلك البداهة التي كانت تميزها، إذ فتح "ليبنيتز" الباب أمام الافتراضات الممكنة التي يقترحها الفكر.

إن اللغة التي سعى إليها "ليبنيتز" كانت محل طموح الكثيرين من بعده أمثال:"غوتلوب فريغه" و"برتراند راسل"و"فتجنشتاين" في باكورة عهده (فتجنشتاين الأول)، فمنذ أن أعلن "ليبنيتز" بأنه باستطاعتنا رد جميع الأفكار الإنسانية إلى أفكار أولية باستحداث رموز للدلالة عليها فأصبح في وسع كل من يستعمل الرموز أن يتفادى الوقوع في الخطأ وفضلا عن ذلك أن يكتشف الحقيقة انطلاقا مما هو معطى له.

إن تطور الرياضيات كان معادلا لاستقصاء بنية الفكر الصوري المنطقي الذي انتقل من صورة تقليدية تستعمل لغة طبيعية إلى صورة حسابية، تفطن لها "ليبنيتز"، "**إذ يعتبر أول من أبرز التشابه بين المنطق والرياضيات، فلقد انتبه إلى أن الرياضيات كلها عمليه استنتاج تتم انطلاقا من مبادئ منطقية وبواسطة مبادئ منطقية، كما لفت الأنظار إلى أن «البديهيات» الرياضية يمكن أن ترد بالتحليل إلى معان منطقية (...) وبعبارة أخرى: البحث عن الأوليات المنطقية التي يمكن بواسطتها تعريف الأوليات الرياضية**".

بيد أن "ليبنيتز" رغم هذه المحاولة إلا أنه لم يصل بها إلى الطابع الرمزي في شكله الحسابي الدقيق، وهذه المهمة التي وجهت الفكر المنطقي المعاصر إلى ضرورة الأخذ بنموذج التصور الرياضي كمدخل سليم لتطوير المنطق، وذلك بردها إليه، وبهذا ظهرت التوجهات الوضعية

المنطقية على اختلاف أطروحاتها تنادي لغاية واحدة هي المزاوجة بين الطرح الرياضي والطرح المنطقي، من منطلق أن طبيعة مشكلات المنطق يوجد لها حل في الرياضيات كما أن طبيعة مشكلة الرياضيات يوجد حلها في المنطق، فعلى سبيل المثال الاهتزاز الذي تعرضت له الرياضيات حينما انتزعت صفة اليقين عن التصور المطلق للمكان، ولد تصورا جديدا للحقيقة الرياضية لا يتطابق مع واقع موضوعي بعينه، وإنما يفترض أن صدق أي نظرية هندسية إنما يعني اندماجها داخل المنظومة الواحدة، بمعنى أنه يمكن أن تكون هناك المنظومة الهندسية المتناقضة التي ينفي بعضها بعضا والتي تكون صادقة جميعها، وما نعنيه بالصدق هنا ليس سوى الصدق المنطقي في ذاته.

لقد تجسد مسعى "غوتلب فريغه" في محاولة إثبات أن مصطلحات ومفاهيم علم الحساب يمكن تعريفها بالرجوع إلى حدود ومصطلحات المنطق، وقد تطرق إلى هذه الفكرة في كتابه الأساسي" أسس علم الحساب"، ولعل أهمية "فريغه" في الفكر الفلسفي المعاصر لا ترجع لكونه أكد العلاقة الوثيقة بين المنطق والرياضيات وفقط، بل ترجع بالأساس إلى تركيزه على المنهج التحليلي الرياضي، الذي يهتم بالدقة والوضوح في تحليل العبارات اللغوية.

ولكن بالرغم من الأهمية البالغة التي حضي بها فريغه في الفكر الفلسفي المعاصر، كونه استأنف بداية عصر التحليل، غير أن عمله على المستوى الرياضي والمنطقي على وجه الخصوص لم يتحدد إلا كنقطة بداية عملية إصلاح شاملة اكتملت مع "راسل" و"وايتهد" في كتابهما المشترك" أصول الرياضيات".

لا شك أن هذا ما وجده "راسل" في المنطق الجديد الذي لا ينطبق على علم الحساب وفقط بل كل فروع الرياضيات، وهذا ما عمل على تجسيده فيما يسمى بنظرية الطرز(الاحتمالات) التي توصل إليها من خلال قراءته واكتشافه لإحدى التناقضات التي وقع فيها "كانتور" في انشغاله على البرهان القائل باستحالة وجود أكبر عدد أصلي، فتبين له وجود تناقض.

إن الدواعي التي حركت نوازع "راسل" في هذا الصدد تبلورت في إطار النظر إلى الأبعاد الممكنة للرياضيات، بعد أن تبين له كيف أن "فريغه" توقف عند علم الحساب وذهب يتساءل

عن العدد وعن أصله إلى درجة أنه انتهى إلى تساؤلات ميتافيزيقية، هذا ما جعل "راسل" يتجاوز طرح فريغه من خلال تركيزه على شمولية التجديد لا فيما يخص الجبر وفقط وإنما في القضايا التركيبية كذلك، بمعنى أنه لم يختزل مهمة البحث الرياضي في الاشتغال على القضايا الحسابية وإنما شملت كذلك القضايا الاحتمالية.

لهذا نجد أن بوانكاري (Poincaré)لا يرى وجود اختلاف بين التحليل الهندسي إلا في مستوى المادة التي يتم الانشغال عليها، مما يعني معه صحة دعوى راسل في فتح أفاق التحليل ليشمل حتى الهندسة ذاتها (الهندسة التحليلية)، فبالرغم من أننا نميز بين التحليلين والهندسيين إلا أن هذا لا يمكنه أبدا أن يمنع ذو النزعة التحليلية بأن يظلوا تحليلين حتى وإن انشغلوا بالهندسة ولذوي الهندسة من أن يظلوا هندسيين حتى وإن انشغلوا بالتحليل المحض.

ولهذا يرى "راسل" بأن الرياضيات هي علم الكم أي العدد ولكن هذا لا يمثل في نظر راسل صدقا مطلقا لأنه يقر بأن هناك فروعا من الرياضيات لا تستخدم الإحداثيات والقياس، مثلا الهندسة الإسقاطية أو الوصفية للنقطة التي تدخل عندها الإحداثيات لا شأن لها بالعدد ولا حتى بالكمية، وبالتالي يوجد هناك العديد من الدراسات المنفصلة التي ليست لها صلة وثيقة بالأعداد.

يركز "راسل" على الوجهة الرمزية للتعريفات الرياضية لأنها في نظره ذات فائدة كبرى في الحساب التحليلي، إذ بها تستطيع الرياضيات أن تعرف الحدود التي ليست بتصورات، وهنا يكمن في نظره الفرق بين التعريف الرياضي والتعريف الفلسفي، لأن التعريف من الناحية الرمزية يأخذ باختصارات غريبة عن العقل تحتاج إلى درجة كبيرة من الفكر الذي تنطوي تحته نتائج هامة في التحليل، ولعل الخصائص التي يتميز بها التعريف الرياضي هو أن المعرف فصل من الكائنات وهي دائما حدا أو اتصال حدود تعرف بالماصدق أو بالمفهوم.

هذه النتيجة هي التي انطلق منها "راسل"، حيث حدد وجهته إلى المنطق من باب الرياضيات، التي كان بصدد تدعيم أسسها وأصولها الثابتة من خلال قراءته للمنطق التقليدي قراءة ابستيمولوجية جديدة. وتكمن المقتضيات التي استند عليها "راسل" في المنطق الذي يعتبره

الشيء الأساسي في الفلسفة، حيث أن عملها يكمن أصلا في التحليل المنطقي، فهي معنية به أكثر من أي علم آخر من العلوم المختلفة والمتصارعة فيما بينها، لأنها شاملة في افتراضاتها واقتراحاتها، لاسيما إذا ما راعينا طبيعتها الافتراضية التي تحكمها الضرورة المنطقية، حيث لا يمكن بناء علاقة بين تصور وأخر إلى من خلال حكم منطقي سليم، ولهذا فإن البعد المنطقي يعيد من جديد نوع من الثقة للفكر الفلسفي الرياضي، فالفلسفة كبناء شامل تتطلب النقد والتوضيح الذي يكفله منهج التحليل المنطقي الذي "**هو ما يميز ماهويا الأمبيرية (التجريبية) الجديدة والوضعية الجديدة عن مثيلاتها في الماضي، التي كان توجهها بيولوجيا وسيكولوجيا أكثر من غيرها**".

إن موضوع العلم الرياضي أصبح له أكثر من أفق حينما تميز عن غيره من العلوم الأخرى، ولكن هذا التميز لم يعف الرياضيات إطلاقا من الاستغناء عن المنطق، حيث تبين للفلاسفة المعاصرين أمثال "راسل" أنه لا توجد حدود فاصلة يمكن أن نضع الرياضيات على يمينها والمنطق على يسارها. يقول "راسل" في هذا الإطار متسائلا ومجيبا في نفس الوقت: "ما هذا الموضوع الذي قد يسمى بغير تفرقة إما رياضة وإما منطقا؟ أهناك أية طريقة يمكن بها أن نعرفه؟ (...) إننا على استعداد للقول بأن واحد وواحد اثنان، لا أن سقراط وأفلاطون اثنان"، لأنه رغم عدم وجود هذين الشخصين الآن، إلا أنه مازال يصدق القول إن واحد وواحد اثنان، بمعنى أن قولنا إن سقراط وأفلاطون اثنان هو تصور محض، وبالتالي فإن الرياضيات هي تصورات منطقية بالأساس، حيث نقع في مصادرة عن المطلوب إذا ما أردنا أن نضع الحد الفاصل بين الرياضيات والمنطق.

هذا ما تؤكده الضرورة النسقية الرياضية والمنطقية الجديدة، التي أضحت لا تهتم في إذا ما كان الاشتغال يتم على الرياضيات أو على المنطق، وإنما ما يهمها بالدرجة الأولى هو كيف يمكننا أن نعالج إشكالية ما في إطار ما يطرحه العقل الإنساني من قضايا، سواء حكمتها المقتضيات الرياضية أو الضرورة المنطقية، فقد تبين بأن اعتماد المنطق في الرياضيات والرياضيات على المنطق قد سهل كثيرا من مهمة المناطقة والرياضيين المعاصرين، حيث

قدمت الرياضيات للمنطق طابع الرمزية، كما أن المنطق أخرج الرياضيات من إشكالاتها الكلاسيكية، وجعلها أكثر انفتاحا على تطورات المنطق.

وفي حقيقة الأمر إذا تأملنا المنطق الأرسطي بصورة دقيقة وجدنا كما يرى ذلك الكثير من المناطقة المحدثين (الأرسطيين على وجه الخصوص أمثال "يان لوكازوفيتش" الذي أكد بطريقة أخرى على تداخل المنطق والرياضيات) بأنه قد اشتمل على الطابع الرمزي ولكن ليس في مستوى التنظير الحسابي الدقيق لذلك وجد المناطقة المعاصرين أنفسهم مضطرين إلى استخدام لغة الرياضيات من أجل اختصار الطابع الاستدلالي للمنطق.

ومن هنا كان المناطقة المحدثون يتوجهون ضد النزعات الاسمية التي رأت في المنطق الأرسطي عيوبا وأرادت أن تتجاوزها، إذ بالعكس من ذلك لم يصبح المنطق الأرسطي يفهم بهذا الشكل وإنما تبين بأن أرسطو ذاته في تحليلاته الأولى والثانية أوحى بما يسمى بالطابع الرمزي الرياضي، فقد عبر عن بعض القضايا تعبيرا حسابيا. هذا معناه أن المنطق المعاصر (الرمزي الرياضي) يجد سنداته وخلفياته النظرية عند "أرسطو" من خلال تأسيسه لمنطق القضايا والحكم ونظرية القياس التي لم يقم المناطقة المحدثون سوى باكتشاف الأبعاد التي كان يهدف إليها أرسطو لاسيما وأن البعض اعتبر أن المنطق بدأ مع أرسطو وانتهى إليه.

فالمنطق الرياضي الحديث لم يتخذ وجهة مخالفة تماما لوجهة المنطق الأرسطي، غير أن الجديد هو التركيز على استعمال الرياضيات من خلال اقتباس منهجها وأساليبها في الحساب وهذا يعيدنا إلى عمل أحد المناطقة الإنجليز وهو "بول" Boole (1715–1764م) الذي يعد أول من وضع دعائم حساب منطقي مشابه للحساب الجبري، "**أقام جزءا كبيرا من بناء المنطق الرياضي. وإذا كان ليبنيتس يعد المكتشف الأول لهذا المنطق الرياضي فلا شك في أن بول ثاني مكتشفيه**"، حيث عبر عن قوانين الفكر بعلاقات رياضية (جبرية)، وابتداء من هذا سمي المنطق بالجبر المنطقي، الذي يعتمد الرموز الجبرية للتعبير على العمليات الفكرية، "**ولكن هذا «الجبر المنطقي» لم يكتمل إلا مع راسل ووايتهد الذين جعلا منه ما يسمى بـ «المنطق الرمزي» Logistique**".

وعلى الرغم من التطور الذي شهدته أبحاث ودراسات المنطق الرياضي بعد أعمال كل من "راسل" و"وايتهد" والتي تكللت بكتابهما المشترك الموسوم عنوانه بـ "المبادئ الرياضية" principia Mathematica، إلا أن تلك الأبحاث لم تخرج عن نطاق أعمالهما التي ارتبطت بما يعرف بأزمة الأسس الرياضية والبحث عن حلول لها، سواء بتدعيمها أو كرد فعل عليها وهو ما عبرت عنه مذاهب فلسفة الرياضيات المعاصرة (المذهب اللوجستيقي، المذهب الأكسيوماتيكي، المذهب الحدسي).

- **تعريف المنطق الرمزي (اللوجستيقا) Symbolic logic:** هناك من يطلق اسم المنطق الرمزي للتمييز بين المنطق التقليدي والمنطق والمعاصر، حيث إنه "اسم يطلق على عملية تناول المنطق الصوري بلغة رمزية دقيقة أو حساب منطقي يأخذ شكلا بعينه، بهدف تجنب الوقوع فيما ينتج عن استخدام اللغة العادية من غموض والتباس".
- **مفهوم المنطق الرياضي Mathematical logic:** لا يقتصر المنطق الرياضي على المنطق الخاص بالرياضيات فقط، بل إن "قوانينه تشمل كل مجالات الفكر لأنها صيغ فارغة من أي محتوى تخضع لقواعد معينة في بنائها واشتقاقاتها وتحويلاتها. ويمكن أن تملأ بأي محتوى علمي أو معرفي. وهو ليس رياضيا لأنه يرتدي ثوبا رياضيا، بل لأنه استطاع أن يقدم للرياضيات الصورية التي كانت في حاجة ماسة إليها من أجل تدقيق لغتها".
- **موضوعه:** يدرس المنطق الرياضي مختلف الأشكال العامة للاستنباط أو الاستدلال الاستنباطي بين قضايا، ومن أهم خصائصه استخدام الرموز، "والرموز التي تستخدم في المنطق نوعان أساسيان هما: المتغيرات variables والثوابت constants.
- **خصائص المنطق الرياضي:** يمكننا أن نبين خصائص المنطق الرياضي الجديد "كما فعل Lewis على النحو التالي: ١- أما من حيث الموضوع فإن موضوعه هو موضوع المنطق (...) ٢- وأما من حيث الأداة فأدواته الرموز (...) ٣- وإلى جانب الرموز الثابتة توجد رموز متغيرة (...) ٤- كل نظرية في المنطق الرياضي تقوم على الاستدلال".