Université de M'sila(2020/2021) Le 20/02/2021
Faculté De Technologie
Spécialité: Energies Renouvelable et Environnement Durée: 1^h
Niveau: $1^{\text{ière}}$année

Epreuve du 1^{er}semestre
Module: Mathématiques 01

Tu as le choix entre les exercices 1 et 2. L'exercice 3 est obligé.

Exercice 01

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$g(x) = \arcsin(4x^2 - 1)$$

- Etudier la fonction g (Domaine de définition, Limites, Dérivée, Sens de variation) puis tracer le graphe de g.

Exercice 02

Soit U l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1, +\infty[$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x) = e^{2x} - 1$

1. Déterminer $U^{-1}(\{0\})$ et $U([0, \ln 2])$.
2. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1}

Exercice 03

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(x)} - e(1-x)}{\sin x}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.
2. Calculer la limite de la fonction f au point 0.
3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Ind: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ...,$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ...$
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...,$

Université de M'sila(2020/2021) Le 20/02/2021
Faculté De Technologie
Spécialité: Energies Renouvelable et Environnement Durée : 1^h
Niveau: $1^{\text{ière}}$année

Epreuve du 1^{er}semestre
Module : Mathématiques 01

Tu as le choix entre les exercices 1 et 2. L'exercice 3 est obligé.

Exercice 01

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$, en 0 on calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$

On a $-1 \leq \cos\dfrac{1}{x} \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\begin{cases} -x \leq x\cos\dfrac{1}{x} \leq x & \text{si } x > 0 \\ x \leq x\cos\dfrac{1}{x} \leq -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En passant à la limite, on trouve $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Alors f est continue en 0. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}$....(...2pts)

b. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, au point $x_0 = 0$ on calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \cos\dfrac{1}{x}$, cette limite n'existe pas alors f n'est pas dérivable au point 0. Ainsi elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.....(...2pts)

2. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction

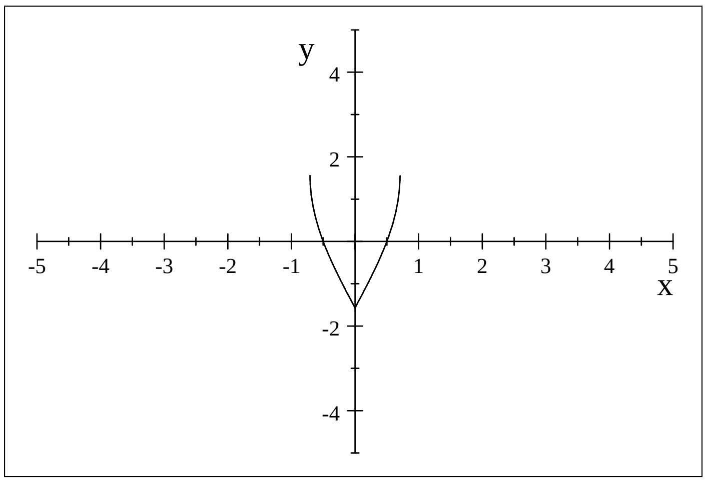
$$g(x) = \arcsin(4x^2 - 1)$$

- Etudier la fonction g (Domaine de définition, Limites, Dérivée, Sens de variation) puis tracer le graphe de g.
- $D_g = \{x \in \mathbb{R}, \ -1 \leq 4x^2 - 1 \leq 1\} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$....(...1$pts$)
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}} g(x) = g(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} g(x) = g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2}$....(...1$pts$)

- g est continue sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et dérivable sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et on a pour tout $x \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$

$$g'(x) = \frac{8x}{\sqrt{1-(4x^2-1)^2}}$$

- Pour $x < 0$, on a $g'(x) < 0$ alors g est décroissante sur $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right[$
- Pour $x \geq 0$, on a $g'(x) \geq 0$ alors g est croissante sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$....(...1$pts$)
- $y = \arcsin(4x^2 - 1)$....(...1pts)



Exercice 02

Soit U l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1, +\infty\,[$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x) = e^{2x} - 1$

1. Déterminer $U^{-1}(\{0\})$ et $U([0, \ln 2])$.

- $U^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R},\ U(x) \in \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R},\ U(x) = 0\} = \{0\}$....(...2$pts$)
- $$\begin{aligned} U([0, \ln 2]) = &\ \{U(x) \in\,]-1, +\infty\,[\,,\ x \in [0, \ln 2]\} \\ &= \{e^{2x} - 1 \in\,]-1, +\infty\,[\,,\ 0 \leq x \leq \ln 2\} = \ [-1, 3] \end{aligned}$$ ....(...2pts)

2. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1}

On montre que U est injective et surjective....(...3pts)

$$U^{-1} : \quad]-1, +\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow U^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{2}$$ ....(...1pts)

Exercice 03

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{\cos(x)} - e(1-x)}{\sin x}$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f(x)$.

- Le premier terme non nul du DL du dénominateur est de dégrée 1. Alors on effectue le Dl a l'orde 4.

- $$\begin{aligned} e^{\cos(x)} = \; & e^{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\circ(x^4)} = e.e^{\left(\frac{-x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\circ(x^4)\right)} \\ & = e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2+\circ(x^4)\right] = e(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6})+\circ(x^4) \end{aligned}$$ ....(...3*pts*

- $$\begin{aligned} f(x) = \frac{e(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6})+\circ(x^4)-e(1-x)}{x-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^4)} & = \frac{e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6})+\circ(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^3)} \\ & = \left[e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6})+\circ(x^3)\right]\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^3)} \\ & = e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6})\left(1+\frac{x^2}{6}\right)+\circ(x^3) \\ & = e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{12})+\circ(x^3) \end{aligned}$$ ....(...5*pts*

2. Calculer la limite de la fonction f au point 0.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = e$$

....(...2*pts*)

3. Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

La courbe de f admet une tangente au voisinage de 0 d'équation $y = e(1-\frac{x}{2})$

- $f(x) - y = e(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})+\circ(x^2) - e(1+\frac{x}{2}) = e.\frac{x^2}{6}+\circ(x^2) \geq 0$ pour tout x

Alors la courbe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.....(...2*pts*)

Ind: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...,\quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...,$