Université de M'sila
Faculté de Technologie
Département du GE

M2 Automatique et systèmes

Corrigé type Diagnostic

Exo 1 (11/11)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f(t)$$

(1) $M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (0,25) $\longrightarrow$ Le système est observable (0,25) car Rang $(M_{obs}) = 2$ (on a au minimum deux vecteurs linéairement indépendants) (0,25)

(2) $\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$
$\hat{y} = C\hat{x}$

$\det(PI - A) = (P+3)(P+1) = P^2 + 4P + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = -2 & (0,25) \\ P_2 = -2 & (0,25) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P_{1d} = 5 \times P_1 = -10 & (0,25) \\ P_{2d} = 5 \times P_2 = -10 & (0,25) \end{cases}$

Le polynôme caractéristique désiré : $P_d = P^2 + 20P + 100$ (0,25)

$\det(PI - (A - LC)) = P^2 + 20P + 100$ (0,25) on prend $L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} P+3+L_1 & 1 \\ -1 & P+1+L_2 \end{bmatrix}\right) = P^2 + 20P + 100$$

$\Rightarrow P^2 + (4 + L_1 + L_2)P + 4 + L_1 + 3L_2 + L_1L_2 = P^2 + 20P + 100$ (0,25)

$\Rightarrow \begin{cases} 4 + L_1 + L_2 = 20 & (0,25) \\ 4 + L_1 + 3L_2 + L_1L_2 = 100 & (0,25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_2 = 16 - L_1 & (0,25) \\ L_1^2 - 14L_1 + 48 = 0 & (0,25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4 \\ \text{et} \\ \sqrt{\Delta} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} L_{11} = \dfrac{14+2}{2} = 8 & (0,25) \\ L_{12} = \dfrac{14-2}{2} = 6 & (0,25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{21} = 8 & (0,25) \\ L_{22} = 10 & (0,25) \end{cases}$ En prend la première solution.

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ (0,25) $\Rightarrow A - LC = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$ (0,25)

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}y(t)$$ 0,75

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\hat{x}(t)$$

* $e_x = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu + F_x f - A\hat{x} - Bu - L\hat{y} + Ly$

$\Rightarrow \dot{e}_x = Ax + F_x f - A\hat{x} - L(Cx + F_y f) + LC\hat{x} = (A - LC)e_x + (F_x - LF_y) f$ 0,25

$\dot{e}_x = (A - LC)e_x + (F_x - LF_y) f$ 0,25

$\Rightarrow p\, e_x(p) = (A - LC)e_x(p) + (F_x - LF_y) f(p)$

$\Rightarrow e_x(p) = [pI - (A - LC)]^{-1}(F_x - LF_y) f(p)$ 0,5

* $e_y(p) = y(p) - \hat{y}(p) = C e_x(p) + F_y f(p)$ 0,25

$$e_y(p) = \underbrace{\left(C[pI - (A - LC)]^{-1}(F_x - LF_y) + F_y\right)}_{G_f(p)} f(p)$$ 0,5

$$G_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{p+9}{(p+10)^2} & \frac{8}{(p+10)^2} \\ \frac{1}{(p+10)^2} & \frac{p^2+12p+12}{(p+10)^2} \end{bmatrix}$$ 1

.Table de signatures:

	f_1	f_2
e_{y_1}	1	1
e_{y_2}	1	1

0,5

Les défauts ne sont pas isolables. 0,25

Alors, on cherche une matrice fonction de transfert $Q(p)$ propre et stable tel que $r(p) = Q(p)\, G_f(p)\, f(p)$ 0,25

Pour avoir une structure isolable on peut choisir $Q(p) = G_f^{-1}(p)$ 0,25

	*	.
r	1	0
*	0	1

0,25

Ceci est faisable puisque $G_f(p)$ est inversible.

$$Q(p) = G_y^{-1}(p) = \begin{bmatrix} \frac{p^2+12p+12}{(p+1)} & -\frac{8}{(p+1)} \\ -\frac{1}{(p+1)} & \frac{p+9}{(p+1)} \end{bmatrix} \text{ 0,5} \Rightarrow \boxed{r(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rho(p)} \text{ 0,5}$$

Exo 2 0,5

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

• $M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 0,25 rang$(M_{ob}) = 2$ (car il y a deux vecteurs LI) 0,25

$\Rightarrow$ Système observable 0,25

• $\dot{z}(t) = N z(t) + G u(t) + L y(t)$

$\hat{x}(t) = z(t) + H y(t)$ 0,25

• Conditions d'existence : $\begin{cases} \text{rang}(CW) = \text{rang}(W) \text{ 0,25} \\ \text{rang}(W) = 1 \\ \text{rang}(CW) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(CW) = \text{rang}(W)$. 0,25

• $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} pI - A & W \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} p+3 & 1 & 1 \\ -1 & p+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 = \overset{2}{\tilde{n}} + \overset{1}{\tilde{p}}$ (vérifiée). 0,25 0,25

$\Rightarrow$ L'observateur à entrées inconnues existe 0,25

* Conditions de convergence :

$$\begin{cases} PA - NP - LC = 0 & \text{0,25} \\ PB - G = 0 & \text{0,25} \\ PW = 0 & \text{0,25} \\ N \text{ stable} & \text{0,25} \end{cases} \quad \text{avec } P = I - HC \text{ 0,25}$$

$PW = 0 \Rightarrow (I - HC)W = 0 \Rightarrow H = W(CW)^+$ 0,25

$(CW)^+ = [(CW)^T (CW)]^{-1} (CW)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 0,25

$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0,25

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0,25

$G = PB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 0,25

$0 = PA - NP - LC = PA - N(I - HC) - LC \Rightarrow \overbrace{PA}^{\tilde{A}} - \overbrace{(L - NH)}^{\tilde{L}} C = N$ 0,25

$N = \tilde{A} - \tilde{L}C$ avec $\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix}$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 0,25

Si la paire $(\tilde{A}, C)$ est observable on peut réaliser un placement de pôles.

$M_{(\tilde{A},C)} = \begin{bmatrix} C \\ C\tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 0,25 $\text{rang}(M_{(\tilde{A},C)}) = 2$ 0,25 (on a 2 vecteurs LI)

$\Rightarrow (\tilde{A}, C)$ est observable 0,25

$\Rightarrow \det\left(pI - (\tilde{A} - \tilde{L}C)\right) = p^2 + 20p + 100$

$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} p+\tilde{L}_1 & 0 \\ -1 & p+2+\tilde{L}_2 \end{bmatrix}\right) = p^2 + 20p + 100$ 0,25

$\Rightarrow p^2 + (2+\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2)p + 2\tilde{L}_1 + \tilde{L}_1\tilde{L}_2 = p^2 + 20p + 100$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = 20 \\ 2\tilde{L}_1 + \tilde{L}_1\tilde{L}_2 = 100 \end{cases}$ 0,25 $\Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}_2 = 18 - \tilde{L}_1 \\ 2\tilde{L}_1 + (18 - \tilde{L}_1)\tilde{L}_1 = 100 \end{cases}$ 0,25

$\tilde{L}_1^2 - 20\tilde{L}_1 + 100 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}_{11} = 10 \\ \tilde{L}_{12} = 10 \end{cases}$ 0,25 $\Rightarrow \begin{cases} \tilde{L}_{21} = 8 \\ \tilde{L}_{22} = 8 \end{cases}$ 0,25

$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ 0,25 $\Rightarrow N = \tilde{A} - \tilde{L}C = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$ 0,25

$L \simeq \tilde{L} + NH = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ 0,25

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} y(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$ 0,75