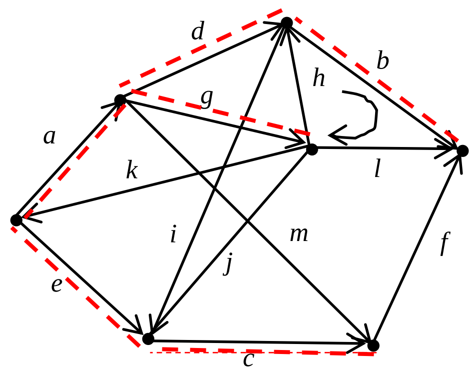
Université Mohamed Boudiaf de M'sila — **Resp.Module: Dr. Said GADRI**
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département : Informatique — **Module : Théorie des Graphes/L2-LMD**

TRAVAUX DERIGES - SÉRIE N° 04 - CORRIGÉ

Exercice 01

Soit le graphe G(X, U) suivant :



1. L'arbre maximal T de G.

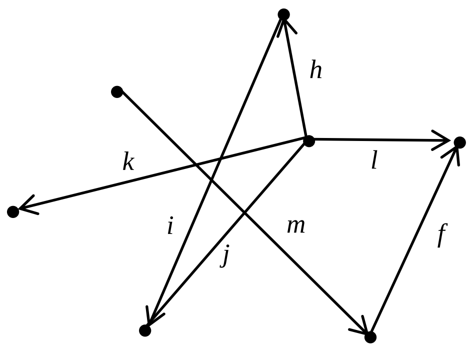
Un arbre maximal de G est un graphe partiel T de G connexe, sans cycle d'ordre n et de taille n – 1.
L'algorithme de construction de l'arbre T du graphe G consiste à prendre les (n – 1) arêtes qui ne forment pas des cycles (On garde tous les sommets et on supprime des arêtes qui ferment (forment) des cycles)
On a l'ordre de G est n = 7 et sa taille est m = 13 ==> l'arbre associé à G est alors caractérisé par :
L'ordre n = 7, taille m'= n - 1 = 6

Arête			*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
Décision			ok	ok	ok	ok	ok	non	ok	non	non	non	non	non	non

L'arbre maximal obtenu est tracé sur le graphe par un trait rouge discontinu.

2. Le coarbre T'associé à T.

Le coarbre est le graphe complémentaire de l'arbre T par rapport à G, c.à.d, on élimine de G toutes les arêtes qui forment l'arbre T pour obtenir le coarbre T'



3. Les vecteurs associés aux cycles : C_b = (b,l,j,e,a,d) ; C_h = (h,d,a,e,j) ; C_i = (i,e,a,d) ;
C_f = (f,l,j,e,a,m) ; C_c = (c,m,a,e) ; C_k = (k,e,j) ; C_g = (g,j,e,a)

Vecteurs → Cycles ↓	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
C_b = (b,l,j,e,a,d) ==> V_{Cb} =	+1	+1	0	+1	-1	0	0	0	0	+1	0	-1	0
C_h = (h,d,a,e,j) ==> V_{Ch} =	+1	0	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	0	0	0
C_i = (i,e,a,d) ==> V_{Ci} =	+1	0	0	+1	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0
C_f = (f,l,j,e,a,m) ==> V_{Cf} =	+1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	+1	0	-1	+1
C_c = (c,m,a,e) ==> V_{Cc} =	+1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	+1
C_k = (k,e,j) ==> V_{Ck} =	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	+1	+1	0	0
C_g = (g,j,e,a) ==> V_{Cg} =	+1	0	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	0	0

4. Calcul du nombre cyclomatique V(G)

On calcule le nombre cyclomatique qui est la dimension de la base de cycles

$$V(G) = m - n + p = 13 - 7 + 1 = 7$$

c.à.d, que notre base de cycles si elle existe est constituée de 07 cycles indépendants

5. Proposition d'une base de cycles pour le graphe G.

Pour construire cette base, on prend l'arbre T et le coarbre T' ==> les arcs qui forment des cycles uniques dans T sont les arcs du coarbre (i, k, m, h, l, j, f)

donc les cycles c_i = (a, d, **i**, e), c_k = (a, g, **k**), c_m = (a, **m**, c, l), c_h = (g, **h**, d), c_l = (d, b, **l**, g), c_j = (a, g, **j**, e), c_f = (a, d, b, **f**, c, e) sont indépendants car chacun contient un arc que les autres ne contiennent pas ==> forment une base de cycles

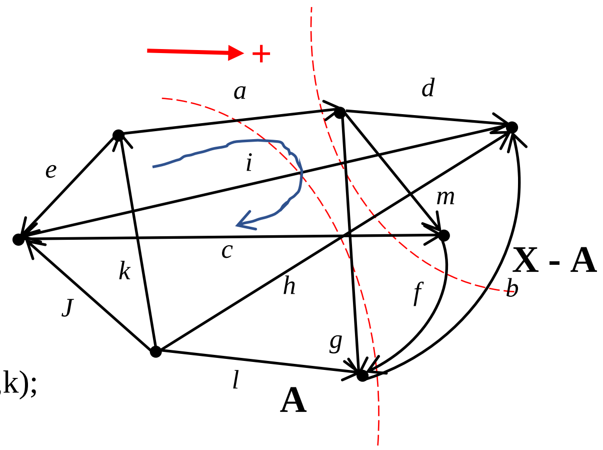
de même, on constate que les cycles donnés dans (3) peuvent constituer une base de cycles car :

- Leur nombre est 7
- Ils sont indépendants, car tout cycle contient une arête que les autres ne contiennent pas

Donc, les cycles C_b = (b,l,j,e,a,d) ; C_h = (h,d,a,e,j) ; C_i = (i,e,a,d) ; C_f = (f,l,j,e,a,m) ; C_c = (c,m,a,e) ; C_k = (k,e,j) ; C_g = (g,j,e,a) constituent une base de cycle pour le graphe G.

<u>Exercice 02</u>

Soit le graphe G(X, U) suivant :



1. Les vecteurs associés aux cocycles :

θa = (a,b,c,f,g,h,i); θd = (d,b,h,i); θe = (e,b,c,f,g,h,i,k);

θj = (j,b,f,g,h,k); $θ_l$ = (l,b,f) ; θm = (m,c,f).

Vecteurs → Cocycles ↓	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
θa = (a,b,c,f,g,h,i) ==> $V_{θa}$ =	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	+1	-1	0	0	0	0
$θ_d$ = (d,b,h,i)==> $V_{θd}$ =	0	+1	0	0	0	0	0	+1	-1	0	0	0	0
$θ_e$ = (e,b,c,f,g,h,i,k) ==>$V_{θe}$ =	0	+1	+1	0	0	-1	-1	+1	-1	0	0	0	0
$θ_j$ = (j,b,f,g,h,k)==> $V_{θj}$ =	0	+1	0	0	0	-1	-1	+1	0	0	0	0	0
$θ_l$ = (l,b,f) ==> $V_{θl}$ =	0	+1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$θ_m$ = (m,c,f). ==> $V_{θm}$ =	0	0	+1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

2 . Calcul du nombre cocyclomatique λ(G).

On calcule le nombre cocyclomatique qui est la dimension de la base de cocycles

$$\lambda(G) = n - 1 = 7 - 1 = 6$$

c.à.d, que notre base de cocycles est constituée de 06 cocycles indépendants

3. Proposition d'une base de cocycles pour le graphe G

On constate que les cocycles donnés dans (1) peuvent constituer une base de cocycles puisque :

- Leur nombre est 6
- Ils sont indépendants, car tout cocycle contient une arête que les autres ne contiennent pas

Donc, les cocycles: θa = (a,b,c,f,g,h,i); θd = (d,b,h,i); θe = (e,b,c,f,g,h,i,k); θj = (j,b,f,g,h,k); θ_l = (l,b,f) ; θm = (m,c,f) constituent une base de cocycles pour le graphe G.

4. Vérification de la relation: $\vec{V}_{ci} . \overrightarrow{V_{\theta_l}}$ **= 0**

Prenons un cycle et un cocycle de manière arbitraire, soient par exemple :

ci = (e, a, g, l, j) ; θi = (a,b,c,f,g,h,i)

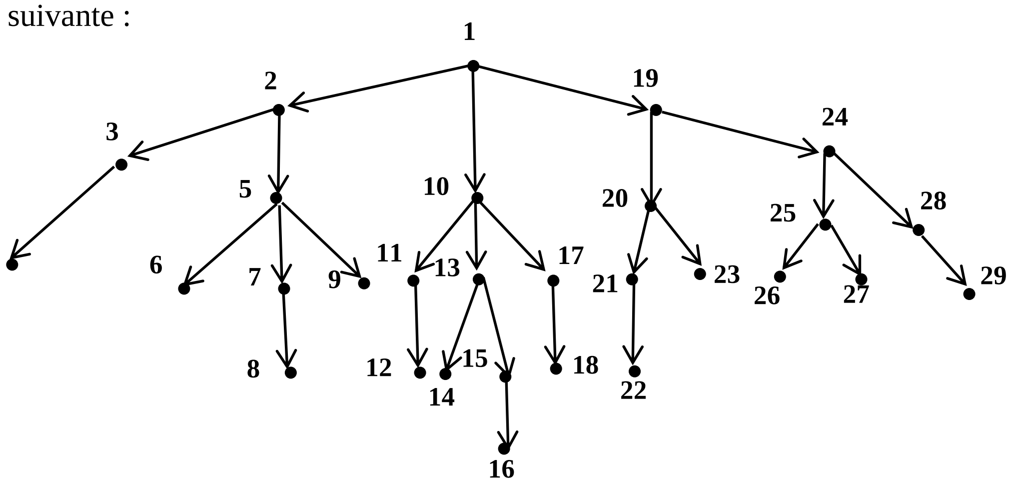
On cherche leurs vecteurs associés puis on calcule le produit scalaire Vc_i . Vθi comme c'est montré sur le tableau ci-après :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	
c = (e, a, g, l, j)	+1	0	0	0	-1	0	+1	0	0	+1	0	-1	0	
θa = (a,b,c,f,g,h,i) ➔vθa =	+1	+1	+1	0	0	-1	-1	+1	+1	0	0	0	0	
$\vec{V}_{ci} . \overrightarrow{V_{\theta_l}}$	+1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	**0**

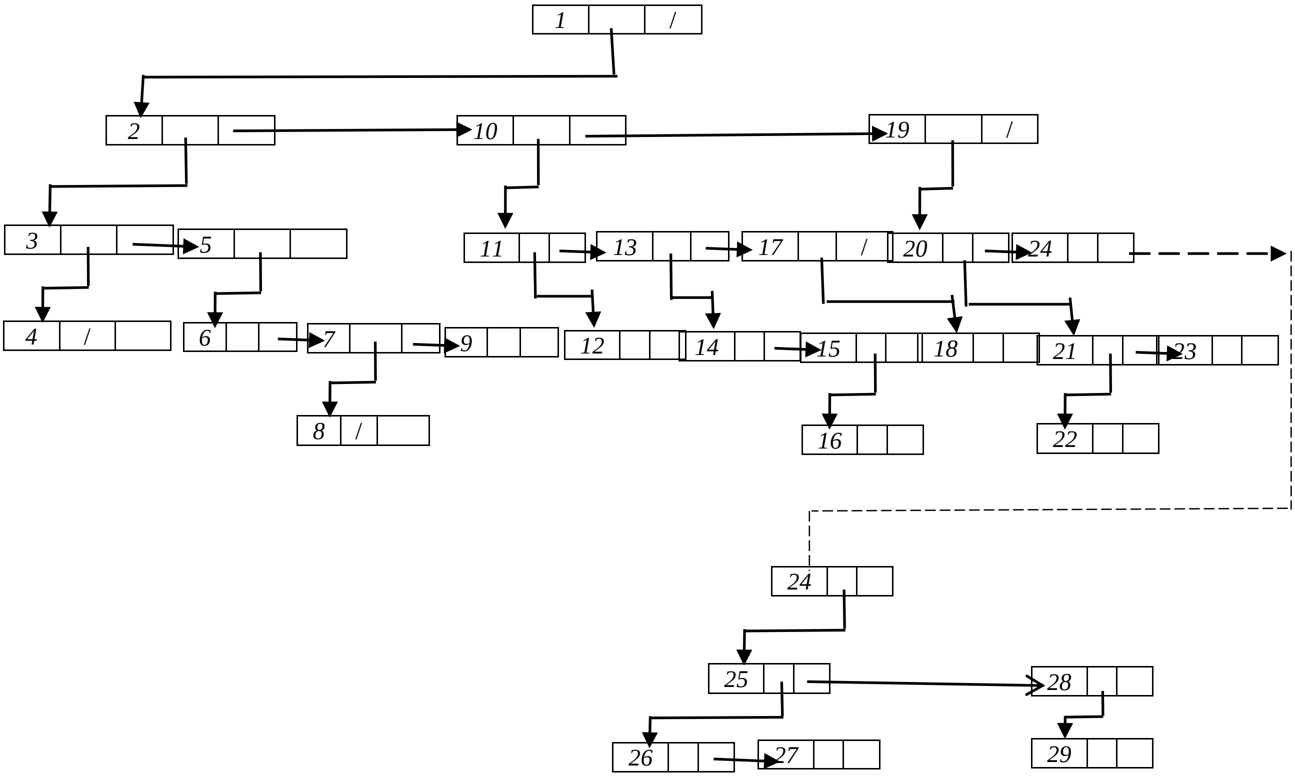
On peut généraliser ça pour tous les vecteurs des cycles et de cocycles.

Exercice 03

Soit l'arborescence suivante :



1. Une représentation pour cette arborescence.



2. Parcours de l'arborescence en largeur.

Se fait selon l'ordre suivant :

{1, 2, 10, 19, 3, 5, 11, 13, 17, 20, 24, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 23, 25, 28, 8, 16, 22, 26, 27, 29}

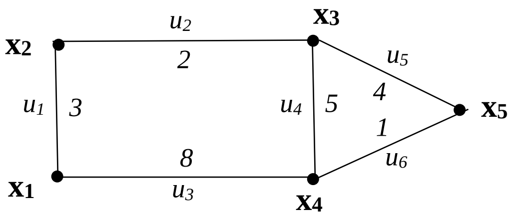
3. Parcours de l'arborescence en profondeur.

Se fait selon l'ordre suivant :

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29}

Exercice 04

Soit G(X, U, W) un graphe connexe valué



Recherche de l'arbre maximale de poids minimum en utilisant :

a) – l'algorithme de KRUSKAL 1

Application de l'algorithme :

Liste d'arêtes non triées :

Arête	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Poids	3	2	8	5	4	1

Après le tri on aura:

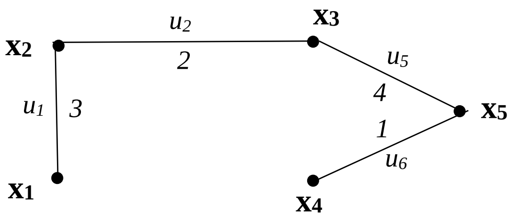
Liste des arêtes triées selon leurs poids

Arête	u_6	u_2	u_1	u_5	u_4	u_3
Poids	1	2	3	4	5	8

Recherche de l'arbre maximal de poids minimum (ordre n=5, taille m'=n-1=5-1=4)

Arête	u_6	u_2	u_1	u_5	u_4	u_3
Poids	1	2	3	4	5	8
Décision	ok	ok	ok	ok	non	non

Poids total de l'arbre maximal de poids minimum = 1+2+3+4 = 10



b) – l'algorithme de KRUSKAL 2

Application de l'algorithme :

On prend la liste non triée des arêtes

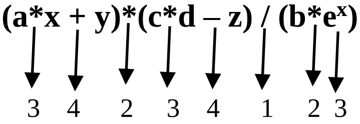
Arête	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Poids	3	2	8	5	4	1
Décision. Prov	ok	ok	ok	ok	ok	ok
Décision Finale	ok	ok	non	non	ok	ok

On obtient le même arbre de la figure précédente : {u_1, u_2, u_5, u_6} avec un poids total = 10

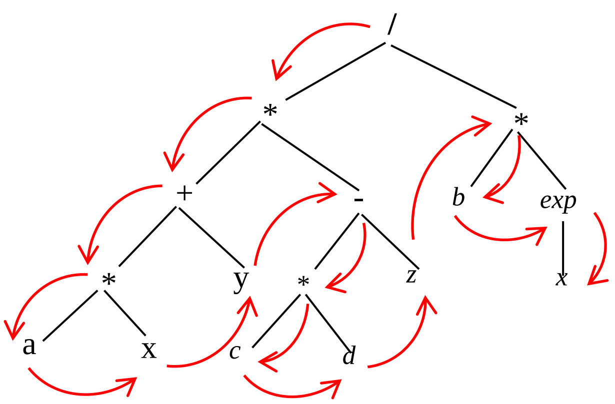
<u>Exercice 05</u>

1 . Représentation de l'expression arithmétique **(ax + y)(cd – z) / (be^x)** sous forme d'une arborescence en respectant les règles de priorité des opérateurs.

(a*x + y)*(c*d – z) / (b*e^x)



priorité des opérateurs



2 . L'expression en notation polonaise.

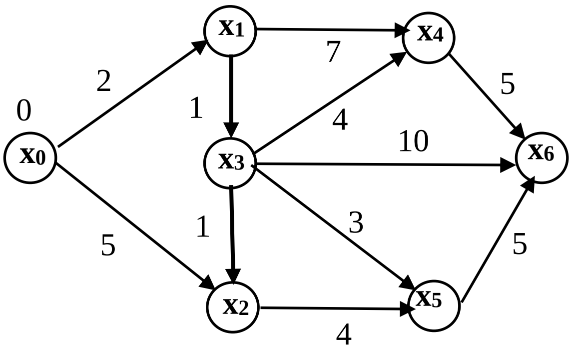
la notation polonaise consiste à mettre toujours les opérateurs avant les opérandes, on obtient cette notation par un parcours en profondeur de l'arbre précédent

/ * + * a x y - * c d z * b exp x

Exercice 06

1. Recerche d'un plus court chemin PCC Entre x_0 et x_4
   Il existe uniquement deux chemins C_1, C_2 entre x_0 et x_4

   $C_1 = (x_0, x_1, x_4) \Longrightarrow w(C_1) = 9$
   $C_2 = (x_0, x_1, x_3, x_4) \Longrightarrow w(C_1) = 7$ c'est le PCC cherché
2. Application de l'algorithme de Moore-Dijkstra sur le graphe pour trouver les PCCs entre x_0 et tous les autres sommets.



L'algorithme de Moore-Dijkstra

i) $S = \{s\}$; $\alpha = s$; $\pi(s) = \pi(\alpha) = 0$; $\pi(x) = +\infty \ \ \forall x \in (X - S)$; $A(x) = \phi \ \ \forall x \in (X - S)$

ii) On considère tous les arcs u tel que : $I(u) = \alpha$ et $T(u) = x \in (X - S)$
   <u>Si</u> $\pi(\alpha)+d(u) < \pi(x)$ alors poser $\pi(x) = \pi(\alpha)+d(u)$; $A(x) = \{u\}$
   <u>Sinon</u> continuer

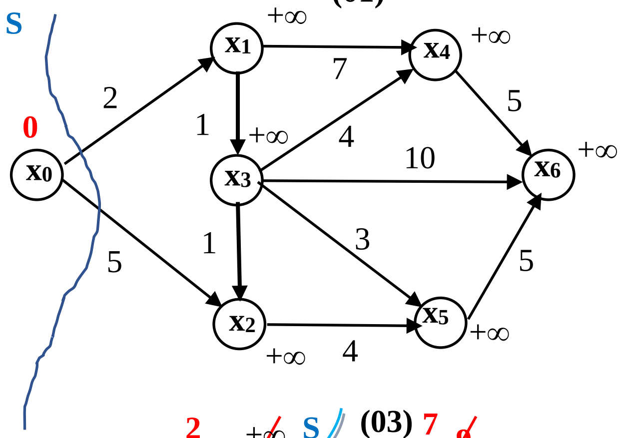
iii) Choisir un sommet $y \in (X - S)$; $\pi(y) = \mathrm{Min}[\pi(x)] \ \ \forall x \in (X - S)$
   <u>Si</u> $\pi(y) = +\infty$ alors terminer S n'est pas racine de G
   <u>Sinon</u> poser $\alpha = y$ $S = S \cup \{\alpha\}$

   <u>Si</u> S = X alors terminer {le problème est résolu}
   <u>Sinon</u> aller en (i)

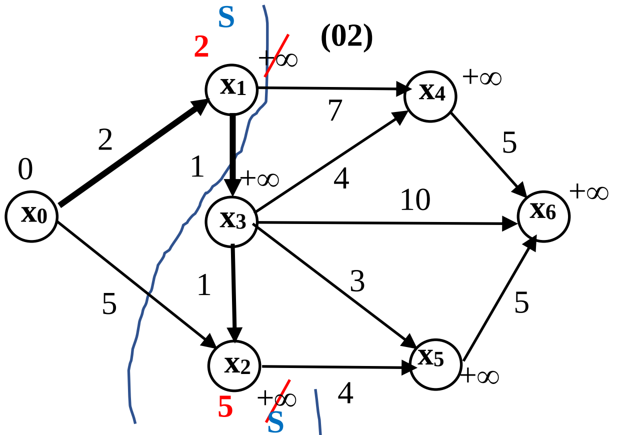
On résume le déroulement de l'algorithme dans le tableau ci-après et les graphes associés :

N°Itér	Arcs u choisis	S	α	π(α)	$x_i \in (X–S)$	$\pi(x_i)$	$A(x_i)$	y	graphe
0 (init)	aucun	$\{x_0\}$	x_0	0	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$\{+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty\}$	aucun	aucun	(01)
1	(x_0, x_1) (x_0, x_2)	$\{x_0\}$ $\{x_0, x_1\}$	/ x_1	0 2	$\{x_1, x_2\}$ ∪ $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$	$\{0+2 = 2, 0+5\}$ $\{+\infty,+\infty,+\infty,+\infty\}$	(x_0, x_1), (x_1, x_3)	x_1	(02)
2	(x_1, x_3), (x_1, x_4)	$\{x_0, x_1\}$ $\{x_0, x_1, x_3\}$	/ x_3	3	$\{x_2, x_3, x_4\}$ ∪ $\{x_5, x_6\}$	$\{5, 2+1, 2+7\}$ $\{+\infty, +\infty\}$	(x_0,x_1), (x_1, x_3) (x_3, x_2),	x_3	(03)
3	(x_3, x_2) (x_3, x_4) (x_3, x_5) (x_3, x_6)	$\{x_0, x_1, x_3\}$ $\{x_0, x_1, x_3, x_2\}$	/ X_2	4	$\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$	$\{3+1, 3+4, 3+3, 3+10\}$	(x_0,x_1), (x_1, x_3) (x_3, x_2),	X_2	(04)
4	(x_2, x_5)	$\{x_0, x_1, x_3, x_2\}$ $\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5\}$	/ x_5	6	$\{x_4, x_5, x_6\}$	$\{7, 6, 13\}$	(x_0,x_1), (x_1, x_3) (x_3, x_2), (x_3, x_4) (x_3, x_5)	x_5	(05)
5	(x_5, x_6)	$\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5\}$ $\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5,x_4\}$	/ x_4	7	$\{x_6\}$	$\{6+5=11\}$	(x_0,x_1), (x_1, x_3) (x_3, x_2), (x_3, x_4) (x_3, x_5)	x_4	(06)
6	(x_4, x_6)	$\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5,x_4\}$ $\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5,x_4, x_6\}$	/ x_6	11			(x_0,x_1), (x_1, x_3) (x_3, x_2), (x_3, x_4) (x_3, x_5), (x_5, x_6)	x_6	(07)
7	aucun	$\{x_0,x_1,x_3,x_2,x_5,x_4,x_6\}$	S = X ==> Algorithme terminé						(08)

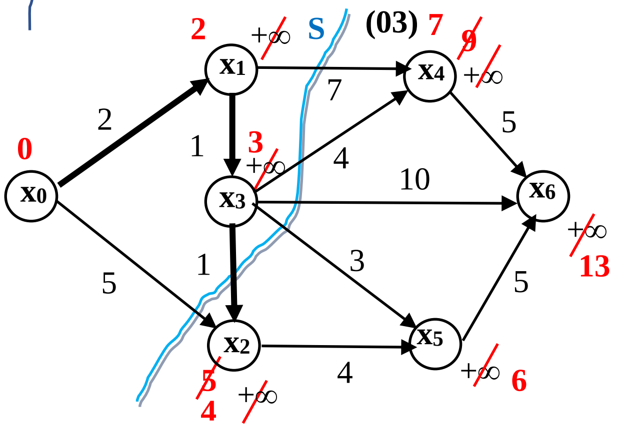
(01)



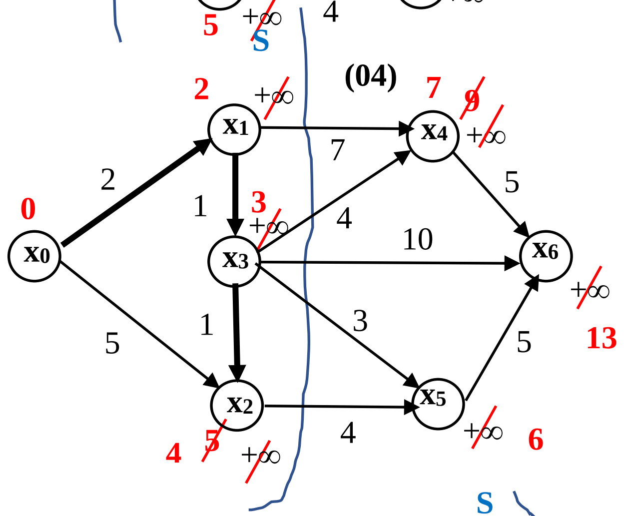
(02)



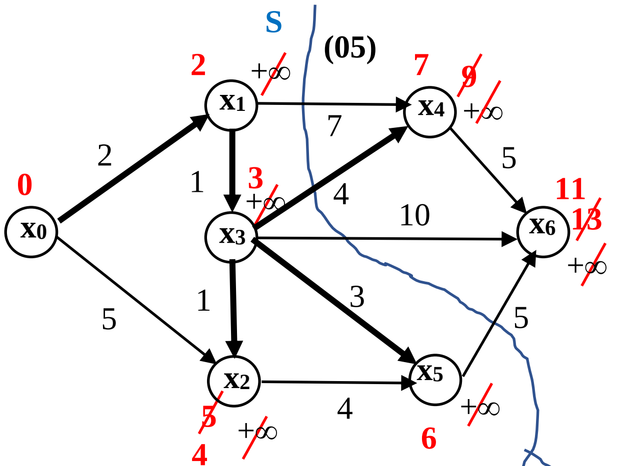
(03)



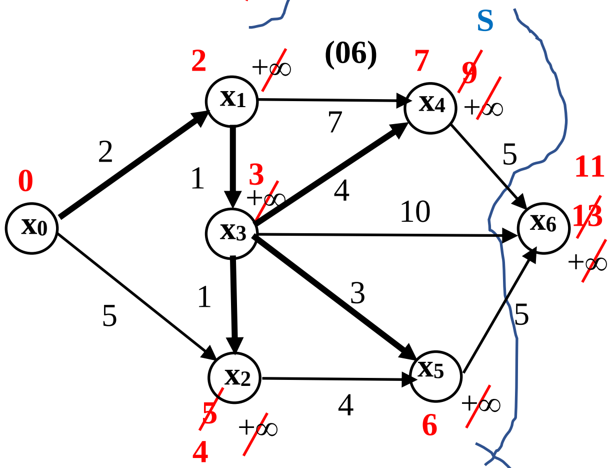
(04)



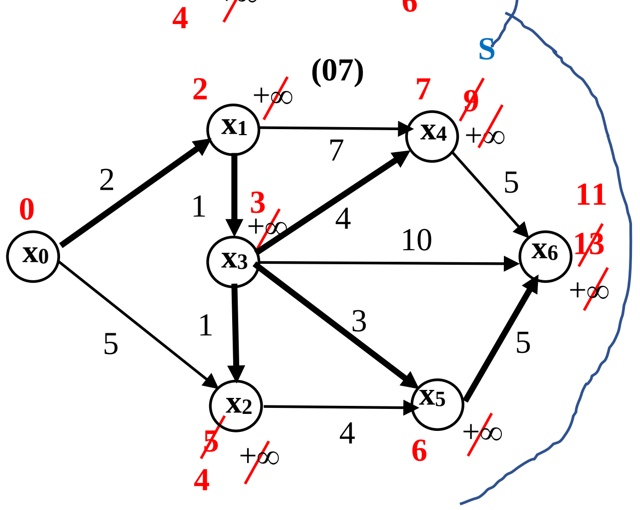
(05)



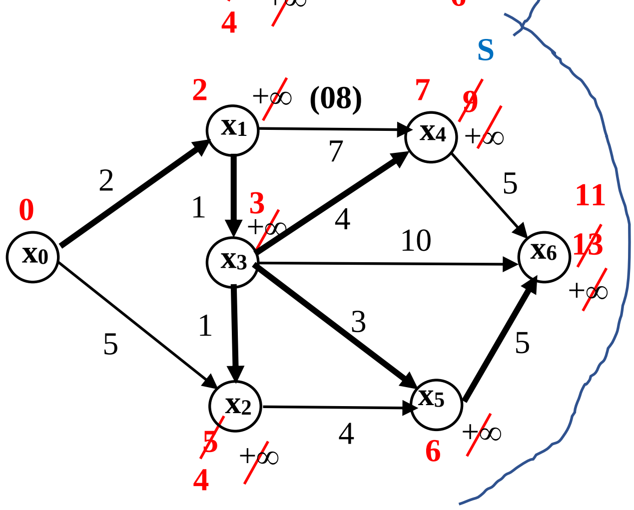
(06)



(07)



(08)



Remarque : les PCCs entre x_0 et tous les autres chemins forment une arborescence.

3. Application de l'algorithme de Bellman sur le même graphe précédent

4. Les PCCs entre x_0 et les sommets : x_4, x_5, x_6
   Selon le dernier graphe (08) :
   $PCC(x_0, x_4) = \{x_0, x_1, x_3, x_4\} \Longrightarrow w(x_0, x_4) = 7$
   $PCC(x_0, x_5) = \{x_0, x_1, x_3, x_5\} \Longrightarrow w(x_0, x_5) = 6$
   $PCC(x_0, x_6) = \{x_0, x_1, x_3, x_5, x_6\} \Longrightarrow w(x_0, x_6) = 11$