University de M'sila
Faculté M.I
Département des Mathématiqiues

Contrôle final, Logique algébrique, Février 2021

Exercice 1 (10 pts)

Soit $\left(L,\ I,\ (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I^0},\ (\psi_\alpha)_{\alpha\in I^1},\ n,\ N\right)$ une algèbre multivalente de Łukasiewicz avec involution.

1. Donner la formule de N si $|I| = 3$.
2. P eut-on trouver cette formule si $|I| \geq 4$ (le cardinal de $I \geq 4$).
3. Montrer que si la chaine I est finie, alors l'involution N est unique.
4. On se place dans le cadre d'une une $\mathcal{L}_{3-}$algèbre $(L, \wedge, \vee, 1, 0, N, \mu)$ (au sens de la première définition de Moisil). Montrer les équivalences.
   (a) $Nx \vee \mu x = 1$.
   (b) $x \vee \gamma x = 1$.
   (c) $\eta x \vee \mu x = 1$.

Exercice 2 (6 pts)

Soit X un ensemble non vide et $R : X^2 \to [0, 1]$ une relation floue.
Montrer que R est une relation d'ordre si et seulement si R_α est une relation d'ordre crispe pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

Exercice 3 (4 pts)

Soient A, B et des ensembles flous définis sur $\mathbb{R}$ par les fonctions d'appartenance
$\mu_A(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$ et $\mu_B(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
Déterminer les fonctions d'appartenance de chacun des ensembles flous suivants :
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Bonne chance

Correction du Contrôle final

Exercice 1 (10 pts)

Soit $\left(L,\ I,\ (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I^0},\ (\psi_\alpha)_{\alpha\in I^1},\ n,\ N\right)$ une algèbre multivalente de Łukasiewicz avec involution.

1. Si $|I|=3$, on ait dans le cas d'une algèbre trivalente de Łukasiewicz et l'involution N est donnée à partir des modalités par : $Nx=\eta x\vee(x\wedge\gamma x)$. $\rightarrow\boxed{(1,50\ pts)}$

2. Si $|I|\geq 4$, cette question est encore ouverte.$\rightarrow\boxed{(1,00\ pts)}$

3. Si la chaine I est finie, alors l'involution N est unique. En effet, supposons que $|I|=p$ et qu'on a deux involutions décroissantes N_1 et N_2, alors :

$$\left.\begin{array}{lllllll}\varphi_1 N_1 & = & N_1\varphi_{p-1} & = & \overline{\varphi_{p-1}} & = & \varphi_1 N_2\\ \varphi_2 N_1 & = & N_2\varphi_{p-2} & = & \overline{\varphi_{p-2}} & = & \varphi_2 N_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_{p-1}N_1 & = & N_1\varphi_1 & = & \overline{\varphi_1} & = & \varphi_1 N_2.\end{array}\right.\rightarrow\boxed{(1,50\ pts)}$$

Ainsi par le principe de détermination de Moisil on obtient $N_1=N_2$.

4. Démonstration des équivalences :

$(a)\Rightarrow(b)$ Supposons que $Nx\vee\mu x=1$. On suppose que : $Nx\vee\mu x=1$. i.e., (a) Remplaçons x par Nx, on obtient : $Nx\vee\mu x=NNx\vee\mu Nx=1$. Cela implique $x\vee\gamma x=1$. Donc $(a)\Rightarrow(b)$.$\rightarrow\boxed{(1,50\ pts)}$

$(b)\Rightarrow(a)$ On suppose que : $x\vee\gamma x=1$. En remplaçons x par Nx dans (b) on obtient $Nx\vee\gamma Nx=1\Rightarrow Nx\vee\mu x=1$. Donc $(a)\Leftrightarrow(b)$.$\rightarrow\boxed{(1,5\ pts)}$

$(b)\Rightarrow(c)$ On suppose que $x\vee\gamma x=1$. En remplace x par μx dans (b) $x\vee\gamma x=1$. Alors $\mu x\vee\gamma\mu x=1(\gamma\mu=\mu N\mu=\mu\overline{\mu}=\overline{\mu}=N\mu=\eta)$ Donc $\mu x\vee\eta x=1$. Donc $(b)\Rightarrow(c)$. Enfin . $\rightarrow\boxed{(1,50\ pts)}$

$(c)\Rightarrow(b)$ Il suffit de remplacer x par Nx et utiliser le fait que $\mu Nx=\gamma x$ et $x\geq\vartheta x$. $\rightarrow\boxed{(1,50\ pts)}$

Exercice 2 (06 pts)

Supposons que $R:X\times X\rightarrow[0,1]$ est une relation d'ordre.

* $R(x,x)=1$,pour tout $x\in X$, alors $(x,x)\in R_\alpha,\forall\alpha\in\left]0,1\right]$, i.e. R_α est réflexive $,\forall\alpha\in\left]0,1\right]$. $\rightarrow\boxed{(1pt)}$

** Supposons que $(x,y)\in R_\alpha$, et $(y,x)\in R_\alpha$. Alors $R(x,y)\wedge R(y,x)\geq\alpha\Rightarrow x=y, i.$e.$R_\alpha$ est antisymétrique. $\rightarrow\boxed{(1pt)}$

*** Supposons que $(x,y)\in R_\alpha,(x,z)\in R_\alpha$. Alors $R(x,z)\geq R(x,y)\wedge R(x,z)\geq\alpha$, $(x,z)\in R_\alpha$, donc R_α transitive.$\rightarrow\boxed{(1pt)}$

Inversement. Si R_α est une relation d'ordre $\forall\alpha\in\left]0,1\right]$. Montrons que R est une relation d'ordre

* R_1 est une relation d'ordre, donc $R(x,x)\geq 1$, donc $R(x,x)=1$. $\rightarrow(1pt)$

** Soit $x\neq y$ avec $R(x,y)\wedge R(y,x)=\alpha$. Alors $(x,y)\in R_\alpha$ et $(y,x)\in R_\alpha$, et par antisymétrie de R_α on obtient $\alpha=0$. $\rightarrow\boxed{(1pt)}$

*** Soit $x,y,z\in X$. Posons $R(x,y)\wedge R(x,z)=\lambda$.

Comme R_λ est transitive $(x,z) \in R_\lambda$. Donc $R(x,y) \wedge R(x,z) \leq R(x,z)$. $\rightarrow \boxed{(1pt)}$
Conclusion R est une relation d'ordre $\Leftrightarrow R_\alpha$ est une relation d'ordre $\forall \alpha \in]0,1]$.

Exercice 3 (04 pts)

A est definit sur $\mathbb{R} \diagdown \{1\}$ et B est definit sur $\mathbb{R} \diagdown \{0\}$
On étudie le signe de entre $d(x) = \mu_A x - \ \mu_B(x)$.
$d(x) = \mu_A(x) - \mu_B(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x-1}{\left((x-1)^2+1\right)(x^2+1)}$
On a $\left((x-1)^2+1\right)(x^2+1) > 0$.
Donc $d(x)$ est du même signe que $2x-1$, soit encore $d(x) > 0$, ssi $x \geq \frac{1}{2}$.
Autrement dit $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ ssi $x \geq \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{(0,5pt)}$
En conclusion :

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) && = \begin{cases} \mu_A(x), \text{ si } x \geq \frac{1}{2}; \\ \mu_B(x), \text{ si } x < \frac{1}{2}. \end{cases} \rightarrow \boxed{(1pt)} \\
\mu_{A\cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) && = \begin{cases} \mu_B(x), \text{ si } x \geq \frac{1}{2}; \\ \mu_A(x), \text{ sinon.} \end{cases} \rightarrow \boxed{(1pt)} \\
\mu_{\overline{A\cap B}}(x) &= 1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) && = \begin{cases} 1-\mu_B(x), \text{ si } x \geq \frac{1}{2}; \\ 1-\mu_A(x), \ x < \frac{1}{2}. \end{cases} \rightarrow \boxed{(0,5pt)} \\
\mu_{\overline{A}\cup\overline{B}}(x) &= \max(\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)) && = \max(1-\mu_A(x), 1-\mu_B(x)) \rightarrow \boxed{(0,5pt)} \\
& && = \begin{cases} 1-\mu_B(x), \text{ si } x \geq \frac{1}{2}; \\ 1-\mu_A(x), \text{ si } x < \frac{1}{2}. \end{cases} \rightarrow \boxed{(0,5pt)} \\
& && = \mu_{\overline{A\cap B}}(x).
\end{aligned}$$