DE LA MODELISATION ENSUITE LA DISCRETISATION A LA SIMULATION NUMERIQUE

Les Méthodes numériques : Les volumes finis

Qu'est-ce qu'un modèle ?

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique, modèle de pensée ou raisonnement).

Pourquoi faut-il modéliser ?

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides...).

Quels sont les différents modèles ?

L'une des solutions est de recourir à une série d'expériences pour analyser les paramètres et grandeurs du système. Mais les essais peuvent s'avérer très coûteux (essais en vol, essais avec matériaux rares, instrumentations très chères...) et ils peuvent être très dangereux (essais nucléaires, ~~environnement spatial~~...). Enfin il peut être difficile de mesurer tous les paramètres : échelles du problème trop petites (chimie du vivant, couche limite en fluide...) ou trop grandes (astrophysique, météorologie, géophysique...).

On peut aussi construire un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène physique. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires dont on ne connait pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage).

Les différentes étapes pour ~~modéliser~~ la simulation Numérique un système complexe :

- Recherche d'un modèle mathématique représentant la physique.
- Mise en équation.
- Elaboration d'un maillage.
- Discrétisation des équations de la physique.
- Résolution des équations discrètes (souvent systèmes linéaires à résoudre).
- Transcription informatique et programmation des relations discrètes.
- Simulation numérique et exploitation des résultats.

DISCRETISATION DES EDP :
LES TROIS GRANDES FAMILLES DE METHODES

Pour passer d'un problème exact continu régit par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- Les différences finies.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre ni de points discrets ou nœuds du maillage.

fini

Différences finies

- Bien connue
- Mise en œvre simple pour une géometrie simple
- Mise en œvre difficile pour une géometrie complexe
- Pas toujours conservative
- Utilisation dans des codes de "recherche"

- Les éléments finis.

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous format variationnel (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

Eléménts finis

- Approche très "mathématique"
- S'adapte à une géometrie quelconque
- Difficultées pour resoudre les termes non-lineaires
- Très utilisée dans le domaine de Mécanique des Solides et pour des problèmes multi-physique (Comsol, ex FemLab).

- Les volumes finis.

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

Volumes finis

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géometrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non-lineaires hyperboliques
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tout les codes généralistes en Mécanique des Fluides : Fluent et CFX (ANSYS), StarCCM+ et ProStar (CD-Adapco), Fire (AVL), OpenFoam (Libre)...

La méthode des volumes finis :

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

L'équation aux dérivées partielles est discrétisée de manière générale à l'aide **d'un maillage** constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints appelés également **Volumes de Contrôles** (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude.

Les équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes de contrôles. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Le maillage :

$d\theta = 1$ $\Delta V = r\,dr\,d\theta\,dz$.

$\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z$

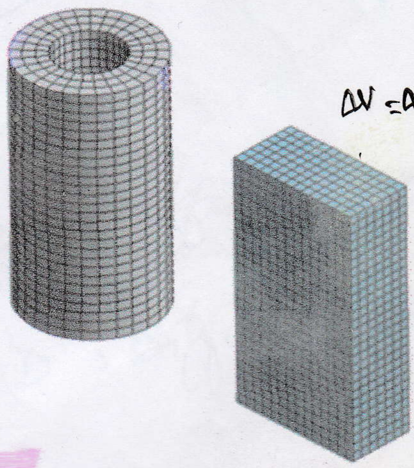

Figure 1. Maillage hexaédrique structuré

Le maillage d'espace d'écoulement selon les directions des coordonnées cartésiennes x et y par exemple représente un ensemble de volumes égaux appelés des volumes de contrôles, ces volumes sont appelés également volumes élémentaires d'intégration. Chacun de ces volumes est égal à la quantité « $\Delta x.\Delta y.\Delta z$ » pour le cas d'un maillage rectangulaire uniforme. La figure 2 ci-dessous représente un volume fini typique entouré par les volumes finis de son voisinage.

Les maillages les plus « efficaces » sont les maillages dits « réguliers » ou « structurés » : ils sont constitués de parallélogrammes en 2D, et de parallélépipèdes en 3D. Efficace signifie que ces maillages permettent d'économiser les ressources informatiques (mémoire, temps de calcul).

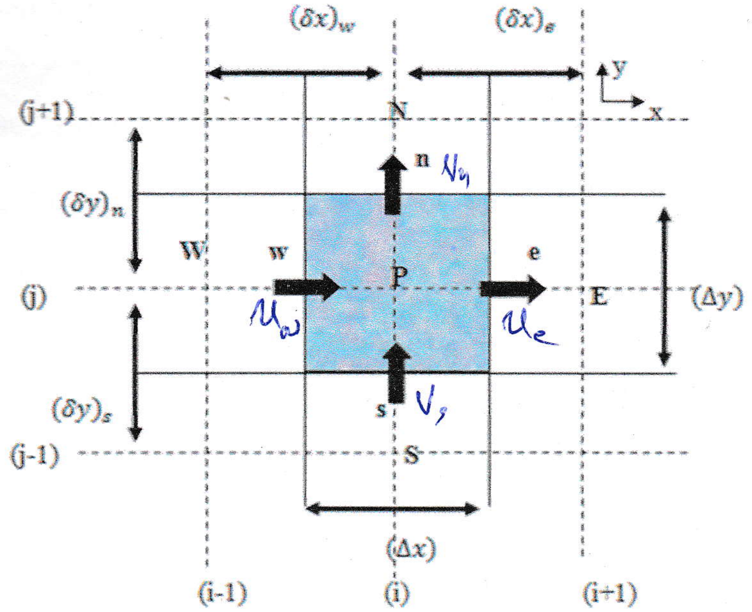

Figure 2 : Représentation d'un volume de contrôle

Suite voir TD

Les équations des phénomènes de transport (Navier Stocks) : Pour le cas d'un fluide réel incompressible newtonien :

- le principe de conservation de la masse peut être décrit par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

- La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

laplacien

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{g}$$

- La conservation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U}.\overrightarrow{grad})T = \frac{\lambda}{\rho c_p}\nabla^2 T$$

$\frac{\lambda}{\rho c_p}$: Diffusivité Thermique

- La conservation de la matière

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{U}.\vec{\nabla})C = D\nabla^2 C$$

D : Diffusivité massique