CHAPITRE I

Méthodes énergétiques

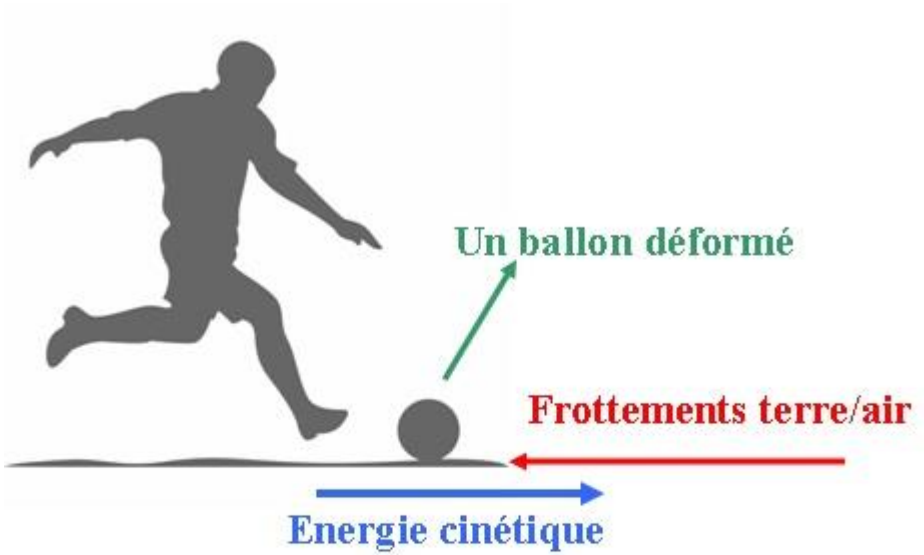
(Calcul des déformations)

1- Introduction

Le travail des forces extérieures, est dépensé pour déformer le corps, produire de l'énergie cinétique et vaincre les résistances de frottement des liaisons.

Si les forces sont appliquées statiquement et les frottements sont négligeables (cas d'un système conservatif), tout le travail extérieur « W » est dépense pour déformer le corps.

Sous l'effet d'une frappe, le footballeur donne au ballon une énergie cinétique. Cette frappe doit vaincre les frottements de la terre puis de l'air. Pendant le trajet le ballon se déforme.



2- Travail de déformation

A l’intérieur d’un élément de structures, les sollicitations créent des contraintes à l’intérieur et des déformations à l’extérieur.

Ces dernières sont visibles est décelables, de ce fait, elle est le critère de construction le plus précis. Une déformation excessive d’une poutre est très dérangeante dans un bâtiment et peut endommager d’autres parties du bâtiment et même provoquer la ruine.

2- Travail de déformation

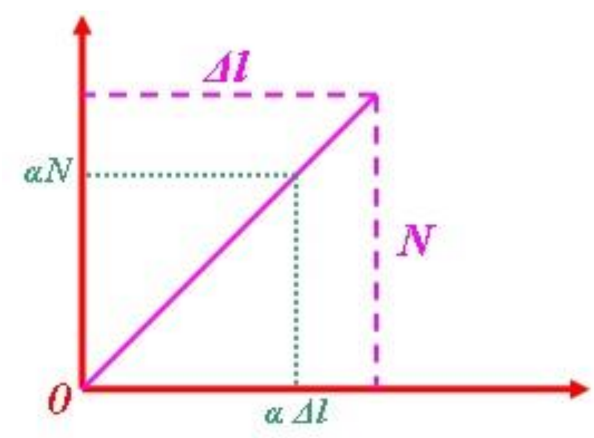
2-1- Sollicitation de traction (compression) simple

Supposons une force extérieure « N » qui augmente de façon statique. Si elle atteint une valeur intermédiaire « αN » (0 ≤ α ≤ 1), la variation de longueur correspondante aura atteint « αΔl »
Lorsqu'on augmente la force par une augmentation infinitésimale « ∂αN=N ∂α », le point d'application subira un déplacement de « ∂(αΔl)= Δl ∂α ». Donc;

$$W = N\Delta l \int_0^1 \alpha \partial \alpha$$

$$= \frac{1}{2} N\Delta l$$

$$= \frac{N^2}{2ES} l$$



2- Travail de déformation

2-2- Sollicitation du moment fléchissant

Supposons que le moment extérieur est appliqué progressivement.

$$W = \frac{1}{2} M_f \Phi$$

$$= \frac{M_f^2}{2EI} l$$

2-3- Sollicitation de torsion

$$W = \frac{1}{2} M_t \Phi_t$$

$$= \frac{M_t^2}{2GI_p} l$$

2-4- Sollicitation de cisaillement

$$W = \chi \frac{T^2}{2GA} l \qquad \chi = \frac{A}{I_z^2} \int \frac{S^{*2}}{b} dy$$

2- Travail de déformation

2-5- Cas général

$$W = \frac{1}{2ES}\int N^2 dx + \frac{1}{2GS}\int \chi T^2 dx + \frac{1}{2EI}\int M_f^{\,2} dx + \frac{1}{2GI_p}\int M_t^{\,2} dx$$

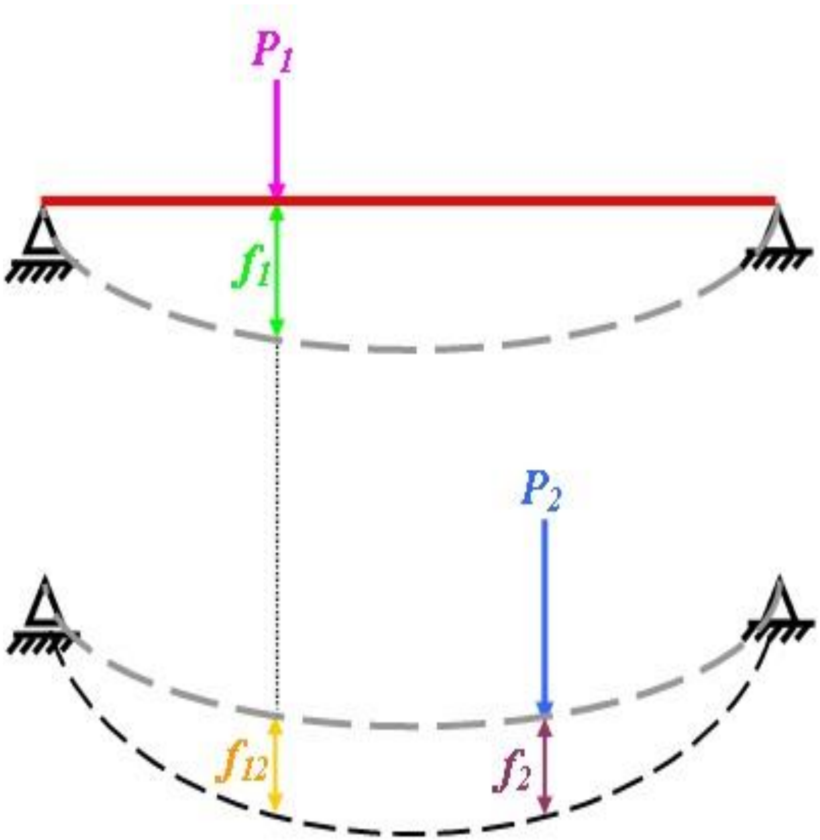
$$W = \int_0^l \left(\text{.........} + \frac{(Charge)^2}{2 * Matériau * Géométrie} + \text{.........} \right) \partial x$$

Elasticité du matériau
***E* :** lorsque la contrainte est normal
***G* :** lorsque la contrainte est tangentielle

Géométrie de la section
***S* :** Si une force
***I* :** Si un couple

3- Théorème de BETTI

Sur une poutre, on applique une force «P_1», ensuite on applique la force « P_2 ». Pendant l'application de la force « P_2 », la force « P_1 » déjà appliquée accomplit un nouveau travail « W_{12} », car son point d'application se déplace de nouveau.



*Le travail total sera donc $W=W_1+W_2+W_{12}$.

*Si on inverse la succesion des travaux on aura $W_{12} = W_{21}$

*Le travail « W_{12} » ou « W_{21} » est dit travail virtuel.

3- Théorème de BETTI

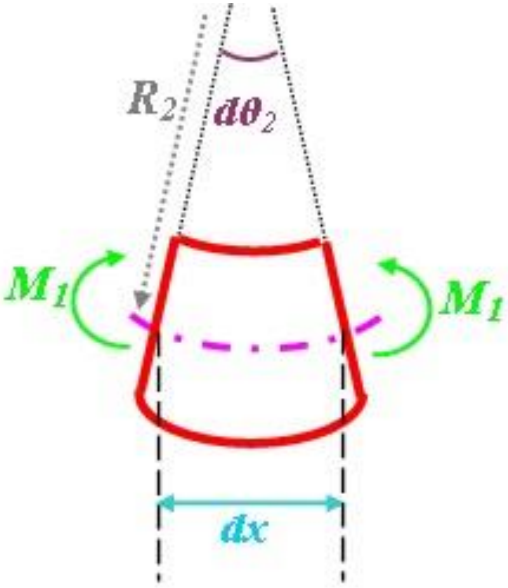
Le travail virtuel « W_{12} » d'un élément de poutre de longueur « *dx* » vaut « $dW_{12}=M_1.d\theta_2$».

D'après la figure:

$$d\theta_2 = \frac{dx}{R_2}$$

Regarder la flexion simple

Sachant que: $\frac{1}{R_2} = \frac{M_2}{EI}$



Alors: $d\theta_2 = \frac{M_2}{EI} dx$

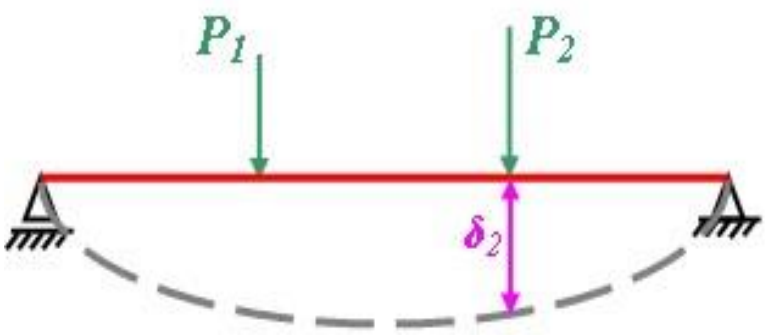
Donc:

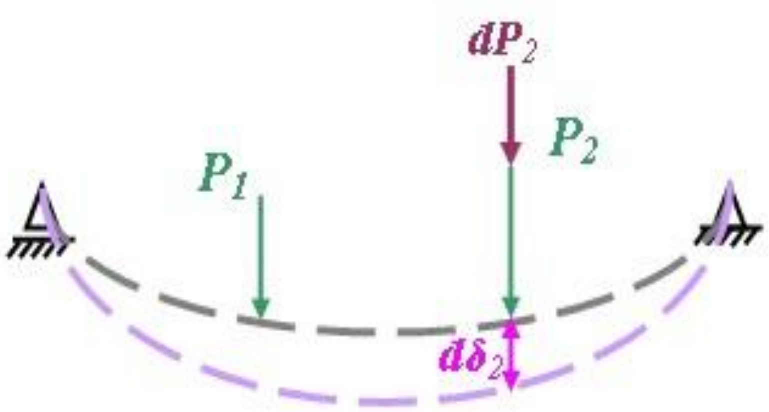
$$dW_{12} = \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

4- Théorème de CASTEGLIANO

Le travail accumulé par les deux forces « P_1 et P_2 » et « W ». Si on donne à l'une des forces (par exemple « P_2 ») un accroissement de « dP_2 », le travail total devient $W+dW$.

N.B: Les points d'applications de « P_1 et P_2 » ne se déplace presque pas, car «$d\delta_2$» *est très petite par rapport à* «δ_2 ». La force « dP_2 », n'a pas d'incidence sur la flèche, car elle est d'une très petite valeur, mais plutôt sur le travail accompli.





4- Théorème de CASTEGLIANO

Changeons l'ordre d'application, en premier « dP_2 », avec un travail égal à « $dP_2 . d\delta_2 /2$ », puis le système de force « P_1 et P_2 ». Le travail total devient alors :

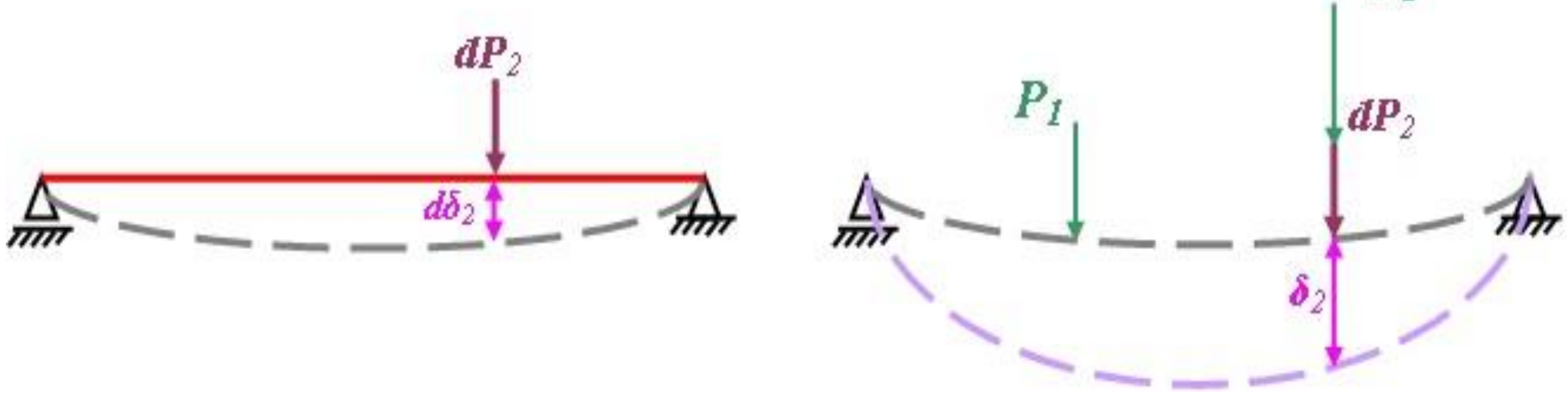
$$\frac{dP_2 . d\delta_2}{2} + W + dP_2 . \delta_2$$

Selon le théorème de Betti

En appliquant l'indépendance de l'ordre d'application des forces:

≈ 0

$$W + dW = \frac{dP_2 . d\delta_2}{2} + W + dP_2 . \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \frac{dW}{dP_2}$$

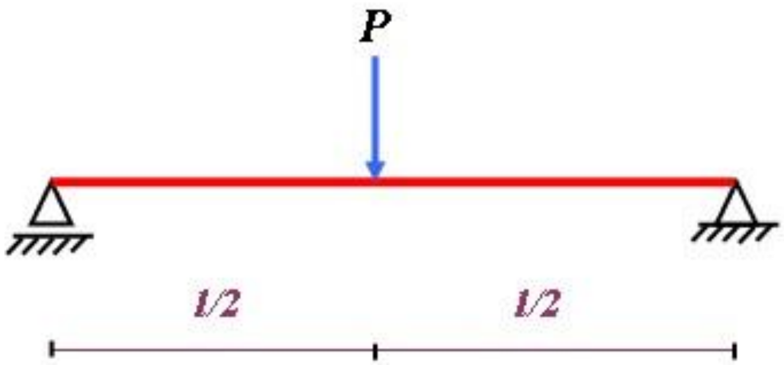


4- Théorème de CASTEGLIANO

La dérivée partielle du travail des forces extérieures par rapport à une force, est égale au déplacement du point d'application de la force dans la direction de cette dernière.

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P}$$

Exercice: Trouver la flèche d'une barre rectiligne de distance « *l* », au point d'application de la force « P ».



4- Théorème de CASTEGLIANO

Solution:

1- En flexion simple, les poutres sont sollicitées par l'effort tranchant et le moment fléchissant

$$W = \frac{1}{2GS}\int T^2 dx + \frac{1}{2EI}\int M_f^2 dx$$

L'équation de l'effort tranchant et le moment fléchissant sont

$0 \le x < l/2$	$l/2 \le x < l$
$T(x) = \frac{P}{2}$	$T(x) = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$
$M(x) = \frac{P}{2}x$	$M(x) = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2}(l - x)$

4- Théorème de CASTEGLIANO

2-L'expression du travail de déformation « *W* » devient.

$$W = \frac{1}{2GS}\left[\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}\right)^2 dx + \int_{l/2}^{l}\left(-\frac{P}{2}\right)^2 dx\right] + \frac{1}{2EI}\left[\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx + \int_{l/2}^{l}\left(\frac{P}{2}(l-x)\right)^2 dx\right]$$

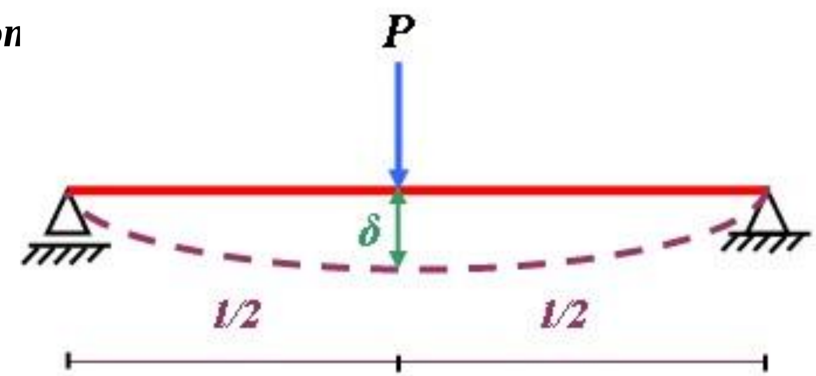
$$\int_0^l T^2 dx = \frac{P^2 l}{4}$$

$$\int_0^l M_f^2 dx = \frac{P^2 l^3}{48}$$

$$W = \frac{P^2 l}{8GS} + \frac{P^2 l^3}{96EI}$$

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

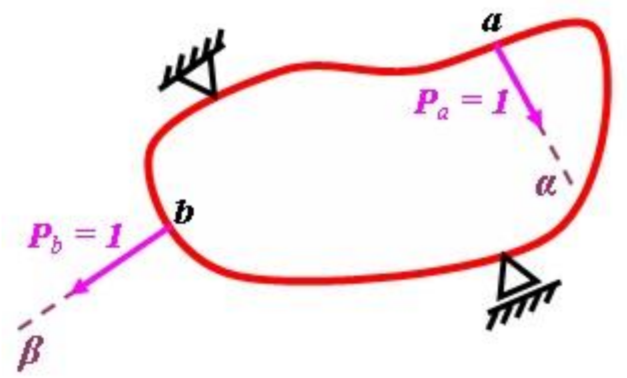
Dans les poutres, l'energie de déformation du cisaillement correspondant au travail de l'effort tranchant, est négligeable devant le travail de déformation du mon



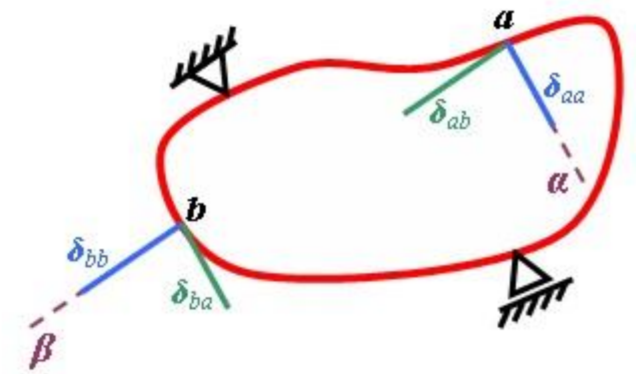
5- Théorème de MAXWELL

Soit les déplacements :

δ_{aa} : du point « *a* » dans la direction « α »
δ_{bb} : du point « b » dans la direction « β »
δ_{ab} : du point « *a* » dans la direction « β »
δ_{ba} : du point « *b* » dans la direction « α »



Si on applique « P_a =1» ensuite « P_b=1 », on aura comme travail total



$$W = W_a + W_b + W_{ab}$$

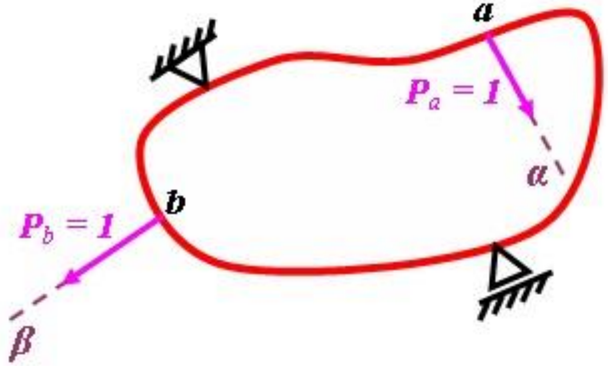
$$W = \frac{1}{2} P_a \,.\delta_{aa} + \frac{1}{2} P_b \,.\delta_{bb} + P_a \,.\delta_{ab}$$

5- Théorème de MAXWELL

Maintenant, appliquons « P_b =1» ensuite « P_a=1 », on aura comme travail total

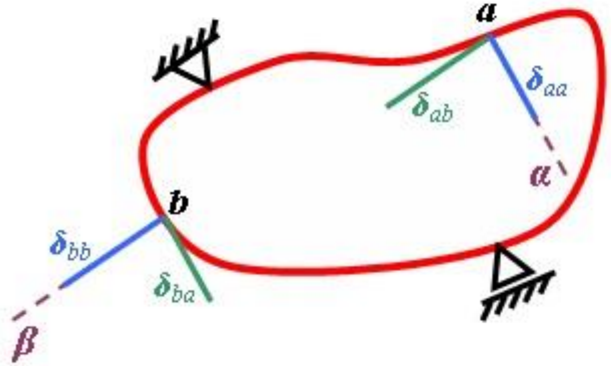
$$W = W_b + W_a + W_{ba}$$

$$W = \frac{1}{2} P_b \,.\delta_{bb} + \frac{1}{2} P_a \,.\delta_{aa} + P_b \,.\delta_{ba}$$



Le travail total est indépendant de l'ordre d'application des forces, donc:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba}$$



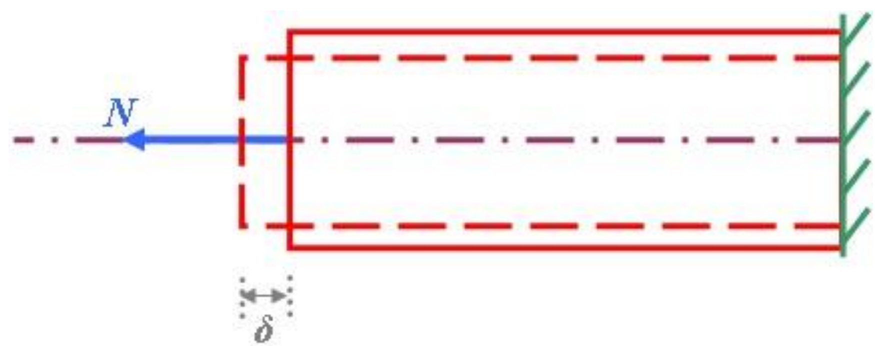
6- Théorème de MAXWELL-MOHR

Soit une barre sollicitée par une force axiale dont on cherche le déplacement à l'extrémité libre.

On va d'abord considérer cette barre subissant uniquement un effort fictif « F=1 » (unitaire) ; $W_{12} = 1 \times \delta$. Le déplacement associé est:

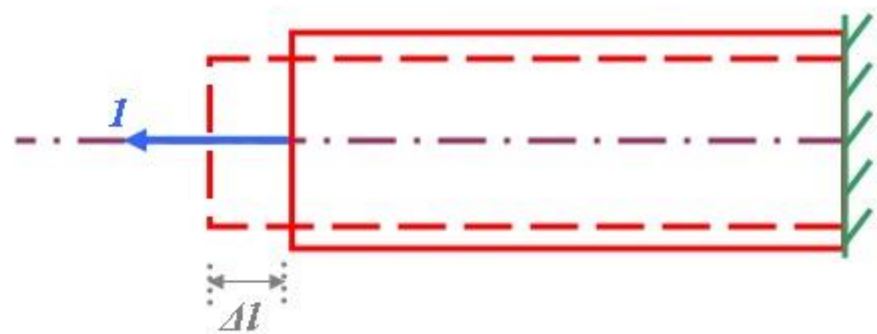
$$\Delta l = \frac{n(x)}{ES} l$$

$$W_{21} = N(x)\Delta l = \frac{N(x)n(x)}{ES} l$$



Il devient:

$$\delta = \frac{N(x)n(x)}{ES} dx$$



6- Théorème de MAXWELL-MOHR

Par extension

$$\delta = \frac{1}{ES}\sum\int N(x)n(x)\,dx + \frac{1}{GS}\sum\int \chi\,T(x)t(x)\,dx + \frac{1}{EI}\sum\int M_f(x)m_f(x)\,dx + \frac{1}{GI_p}\sum\int M_t(x)m_t(x)\,dx$$

Avec :

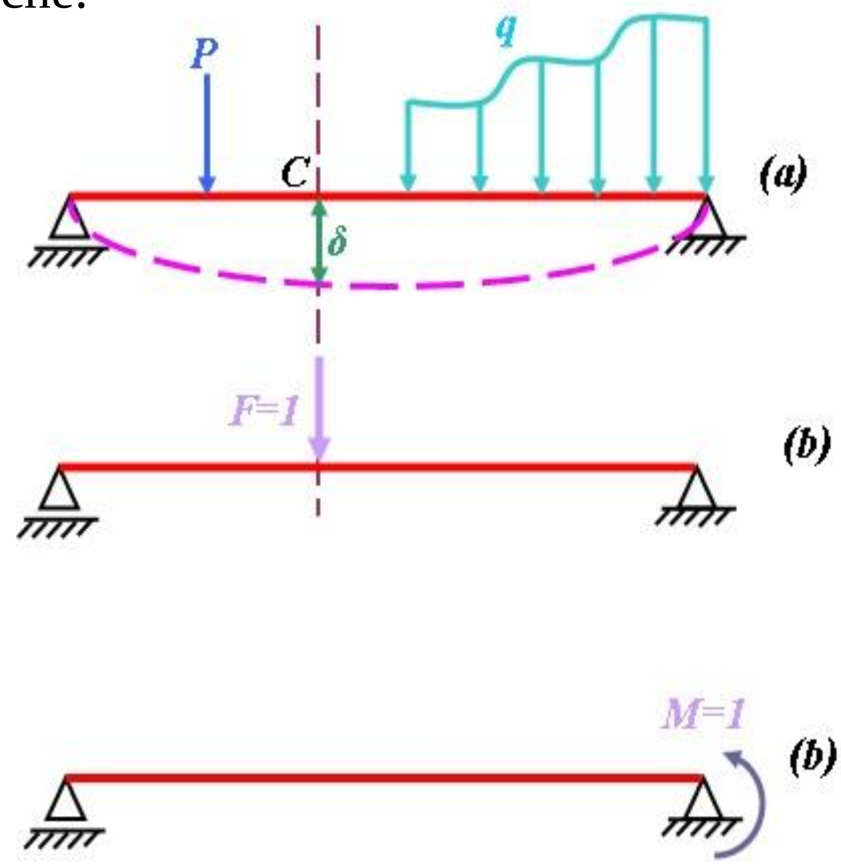
N(x), T(x), $M_f(x)$, $M_t(x)$: sont les ordonnées des diagrammes des efforts axiaux, efforts tranchants, moments fléchissants et les moments de torsion, sous l'impulsion des forces extérieures.

n(x), t(x), $m_f(x)$, $m_t(x)$: sont les ordonnées des diagrammes des efforts axiaux, efforts tranchants, moments fléchissants et les moments de torsion, sous l'impulsion des charges unitaires.

7- Détermination des déplacements par la méthode de MOHR

Notons par (a) l'état donné (sollicitations). Choisissons un état auxiliaire (b) de la même poutre à force unitaire appliquée au point « C », dans la même direction du déplacement cherché.

Le déplacement du point « C » est :



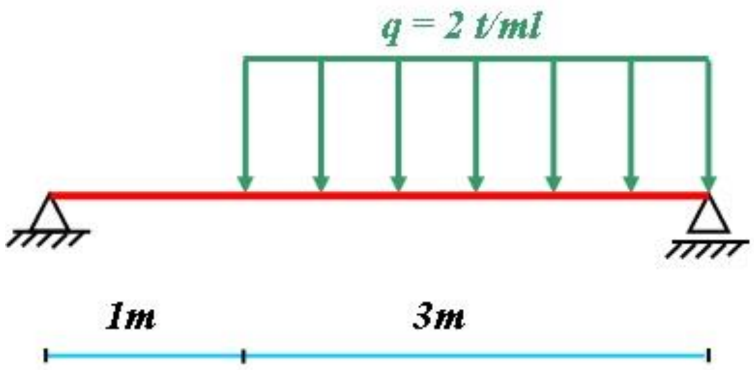
$$\delta_C = \int_0^l \frac{M_a M_b}{EI} dx$$

Pour déterminer le déplacement angulaire (angle de rotation) dans l'un des appuis, l'état auxiliaire (b) devient un moment concentré égale à l'unité.

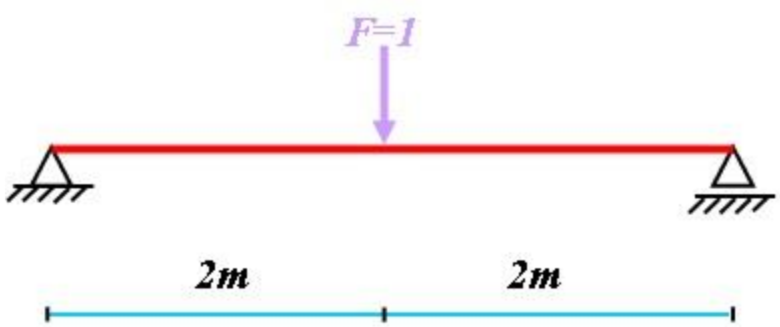
$$\theta = \int_0^l \frac{M_a M_b}{EI} dx$$

7- Détermination des déplacements par la méthode de MOHR

Exercice: Trouver la flèche au milieu de la poutre ainsi que le déplacement angulaire.



Solution: Pour trouver la flèche au milieu de la poutre, on applique une force unitaire dans ce point. L'état (a) est l'exercice en lui-même, l'état (b) est celle de l'application de la force unitaire.



7- Détermination des déplacements par la méthode de MOHR

L'état (a)

$$0 \le x < 1m$$

$$M(x) = \frac{9}{4}x$$

$$1 \le x < 4m$$

$$M(x) = -x^2 + \frac{17}{4}x - 1$$

L'état (b)

$$0 \le x < 2m$$

$$M(x) = \frac{1}{2}x$$

$$2 \le x < 4m$$

$$M(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

Calcul de la flèche « δ »

$$\delta = \int_0^4 \frac{M_a M_b}{EI}$$

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\int_0^1 \left(\frac{9}{4}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right)dx + \int_1^2 \left(-x^2 + \frac{17}{4}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x\right)dx + \int_2^4 \left(-x^2 + \frac{17}{4}x - 1\right)\left(2 - \frac{1}{2}x\right)dx\right]$$

$$\delta = \frac{137}{24EI}[cm]$$

7- Détermination des déplacements par la méthode de MOHR

Solution: Pour déterminer la déformation angulaire, l'état (b) devient une application d'un moment égal à l'unité dans l'un des appuis.

L'état (b)

$0 \le x < 4m$

$$M(x) = \frac{1}{4}x$$

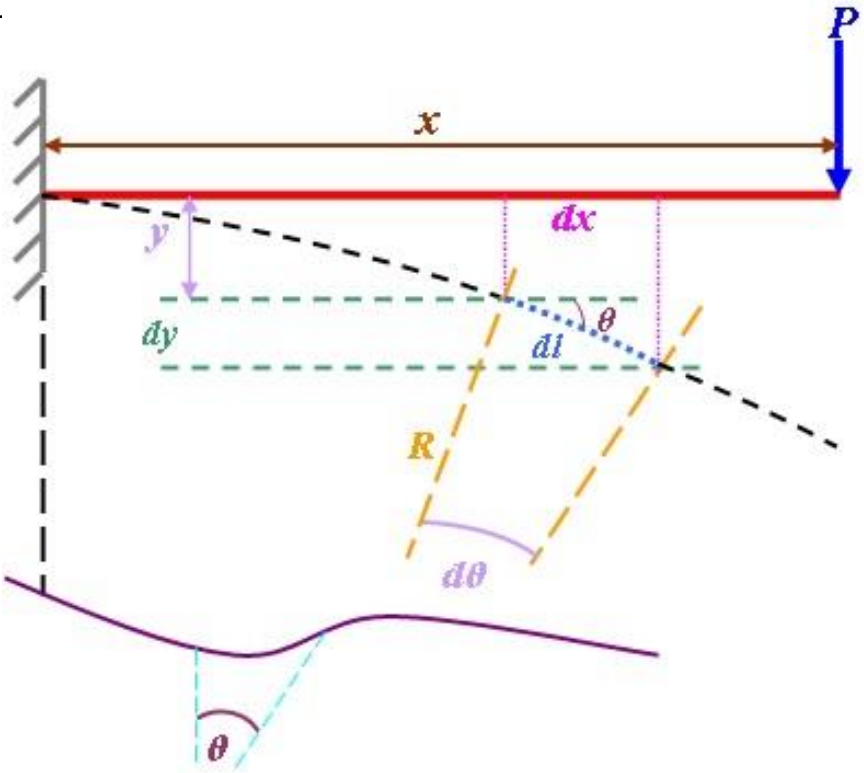
$$\theta = \int_0^4 \frac{M_a M_b}{EI}$$

$$\theta = \frac{1}{EI}\left[\int_0^1 \left(\frac{9}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x\right)dx + \int_1^4 \left(-x^2 + \frac{17}{4}x - 1\right)\left(\frac{1}{4}x\right)dx\right]$$

$$\theta = \frac{225}{48EI}[rad]$$

8- Equation différentielle de la ligne élastique

Sous l’action de la charge « P », la poutre se déforme.
Choisisons un tronçon « dx », on aı



$$tg\ d\theta = \frac{dl}{R} \quad \Rightarrow dl = R.tg\ d\theta$$

$$tgd\theta \cong d\theta; \quad dl \cong dx \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

D’un autre côté:

$$tg\theta = \frac{dy}{dl}; \; dl \cong dx, \;\; tg\theta \cong \theta$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

8- Equation différentielle de la ligne élastique

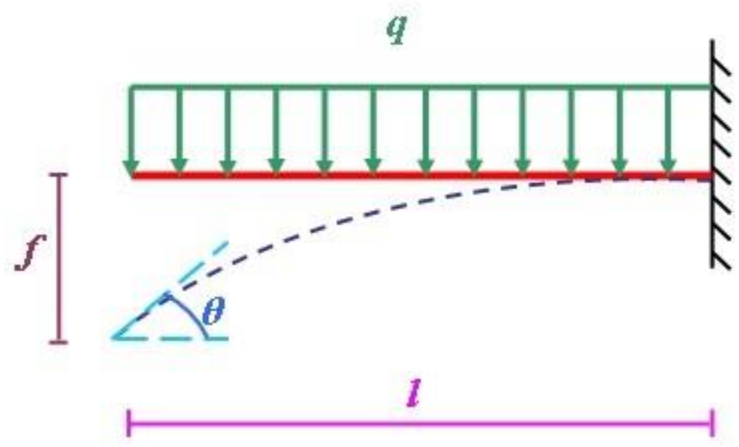
La première intégration est synonyme de l'angle de rotation « θ »;

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) = \int \frac{M}{EI} dx + C_1$$

La deuxième intégration donne l'abaissement de l'extémité libre « *f* »;

$$y(x) = \int \left[\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2$$

Exercice: Déterminer la rotation de l'extrémité libre ainsi que la flèche d'une console soumise à une charge uniformément répartie.



8- Equation différentielle de la ligne élastique

$$T(x) = -qx; \qquad M(x) = -q\frac{x^2}{2}$$

L'équation différentielle de la déformée est:

$$EIy''(x) = -M(x) = q\frac{x^2}{2}$$

$$EIy'(x) = q\frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIy(x) = q\frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Les conditions aux limites sont:

$$y'(L) = \theta(L) = 0 \Rightarrow q\frac{L^3}{6} + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -q\frac{L^3}{6}$$

$$y(L) = f(L) = 0 \Rightarrow q\frac{L^4}{24} - q\frac{L^4}{6} + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = q\frac{L^4}{8}$$

Donc:

$$y'(x) = \theta(x) = \frac{q}{6EI}\left(x^3 - L^3\right)$$

$$y(x) = f(x) = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{L^3}{6}x + \frac{L^4}{8}\right)$$

Lorsque $x=0$:

$$\theta_{max} = \frac{-qL^3}{6EI}$$

$$f = \frac{qL^4}{8EI}$$


Merci