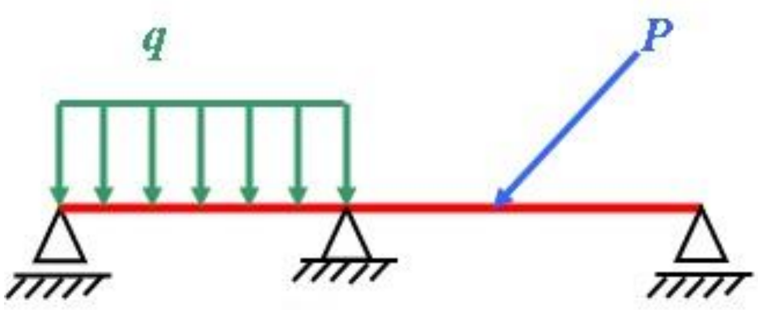
CHAPITRE II

Calcul des poutres hyperstatiques

1- Introduction

Lors d'un chargement d'une poutre initialement droite, elle se déforme sous l'effet du moment fléchissant. Les fibres longitudinales deviennent des arcs circulaires concentriques, de longueurs proportionnelles aux rayons respectifs.

Un système est dit hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaisons, est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Pour étudier et analyser une structure hyperstatique, il est nécessaire d'établir des équations supplémentaires.



2- Méthode de la poutre conjuguée

2-1-Principe de la méthode

Cette méthode est basée sur l'analogie entre l'allure de la déformée et le diagramme du moment fléchissant. La méthode est également appelée « méthode de MOHR » ou « méthode des poids élastiques ».

Comparons l'équation de la ligne élastique avec l'équation qui lie le moment fléchissant à la charge unitaire.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = q$$

Du point de vue mathématique, les deux équations sont identiques. Le diagramme de la courbure « *M/EI* », est considéré comme le diagramme d'une charge fictive « q^* » agissant sur une poutre auxiliaire.

2- Méthode de la poutre conjuguée

2-1-Principe de la méthode

Si la poutre est de section constante, on peut charger la poutre fictive par le diagramme du moment fléchissant « *M* » et diviser ensuite par « *EI* » le cisaillement « *T** » et les réactions d'appuis « *A**, *B** » provoquées par lui.

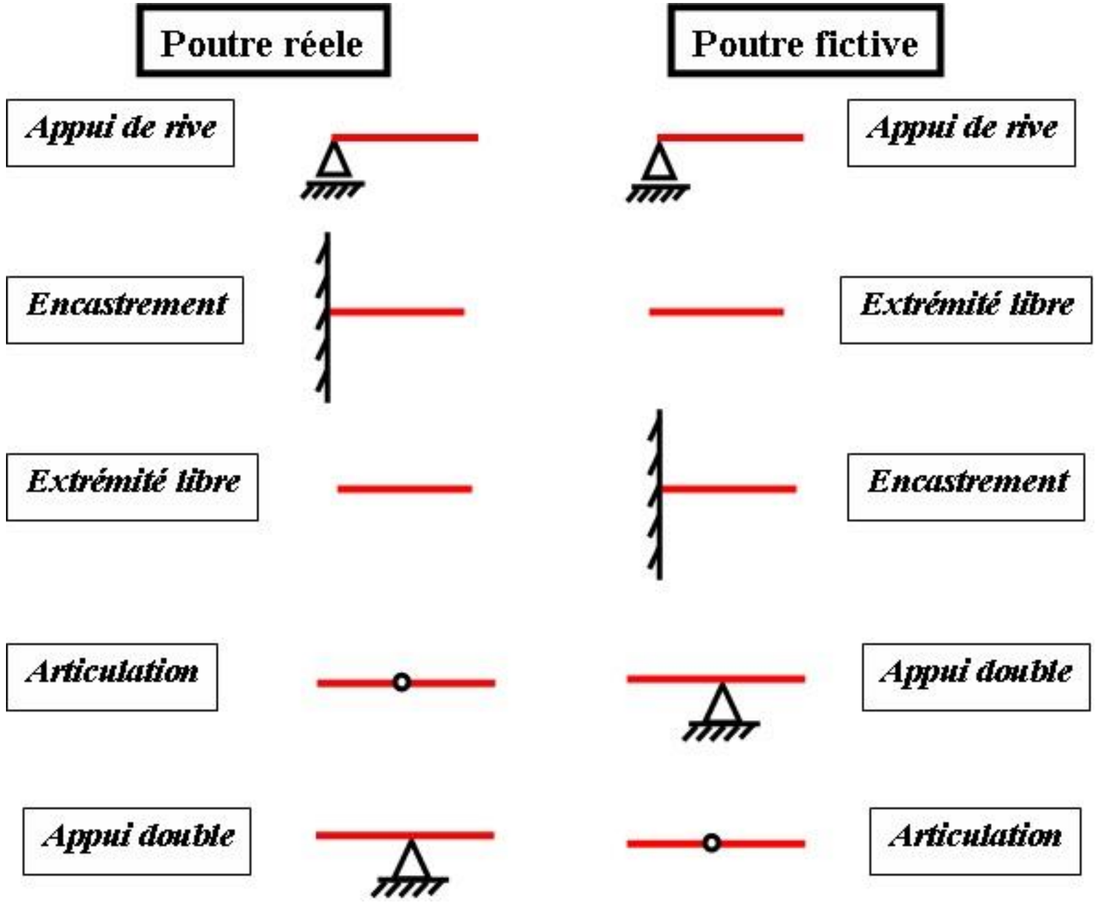
Aux extrémités de la poutre auxiliaire les réactions fictives seront « $A^* = T^*(0)$ » et « $-B^* = T^*(l)$ ».
Si on désigne par « α » et « β » les angles dont tournent les deux sections extrêmes de la poutre, on a par conséquent;

$$\theta = \frac{T^*}{EI} \Rightarrow \alpha = \frac{A^*}{EI}, \quad \beta = \frac{B^*}{EI}$$

2- Méthode de la poutre conjuguée

2-1-Principe de la méthode

Pour construire une poutre fictive, les règles sont les suivantes :



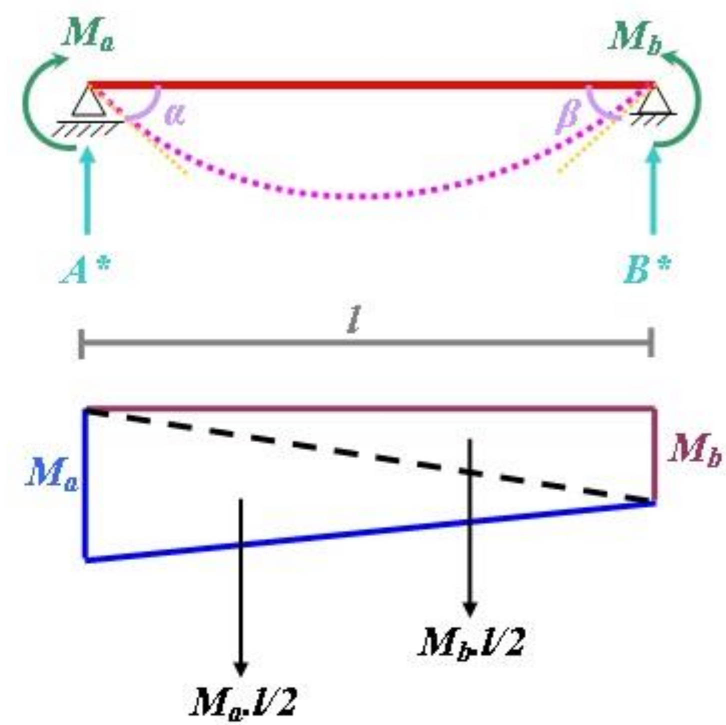
2- Méthode de la poutre conjuguée

2-2-Corollaire du théorème de MOHR

Considérons une poutre simplement appuyée de longueur « *l* », et désignons par « M_a » et « M_b », les moments fléchissants aux extrémités «a et b ». Lorsque une poutre est soumise à deux couples le diagramme « M_f » est un trapèze ayant des ordonnées positives.

$$A^* = \frac{1}{l}\left(\frac{M_a l}{2}\cdot\frac{2}{3}l + \frac{M_b l}{2}\cdot\frac{1}{3}l\right) = \frac{l}{6}\left(2M_a + M_b\right)$$

$$B^* = \frac{1}{l}\left(\frac{M_a l}{2}\cdot\frac{1}{3}l + \frac{M_b l}{2}\cdot\frac{2}{3}l\right) = \frac{l}{6}\left(M_a + 2M_b\right)$$



Alors

$$\alpha = \frac{l}{6EI}\left(2M_a + M_b\right)$$

$$\beta = \frac{l}{6EI}\left(M_a + 2M_b\right)$$

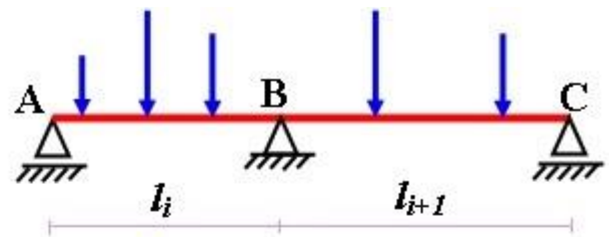
3- Etablissement de la formule des trois moments

Considérons deux travées quelconques consécutives « l_i » est « l_{i+1} » et les trois appuis correspondants A, B, C. Isolons chacune d'elles en ajoutant aux extrémités des moments fléchissants.

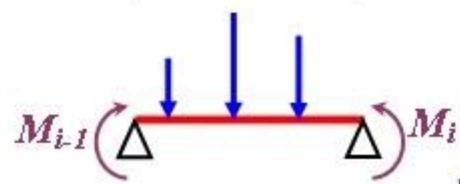
La condition qui détermine « M_i » est que les lignes élastiques des deux poutres aient en « B » la même tangente, c'est-à-dire que les deux sections tournent du même angle et dans le même sens ; si « α_i » fait abaisser la tangente « β_{i-1} » la fait s'élever ($\beta_{i-1} = -\alpha_i$).

Donc:

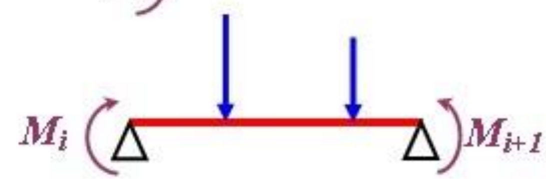
$$\frac{B_i^*}{EI} + \frac{l_i}{6EI}\left(M_{i-1} + 2M_i\right) = -\frac{A_{i+1}^*}{EI} - \frac{l_{i+1}}{6EI}\left(2M_i + M_{i+1}\right)$$



$$M_{i-1}l_i + 2M_i\left(l_i + l_{i+1}\right) + M_{i+1}l_{i+1} = -6\left(B_i^* + A_{i+1}^*\right)$$



$$M_{i-1}l_i + 2M_i\left(l_i + l_{i+1}\right) + M_{i+1}l_{i+1} = -6EI\left(\theta_i + \theta_{i+1}\right)$$

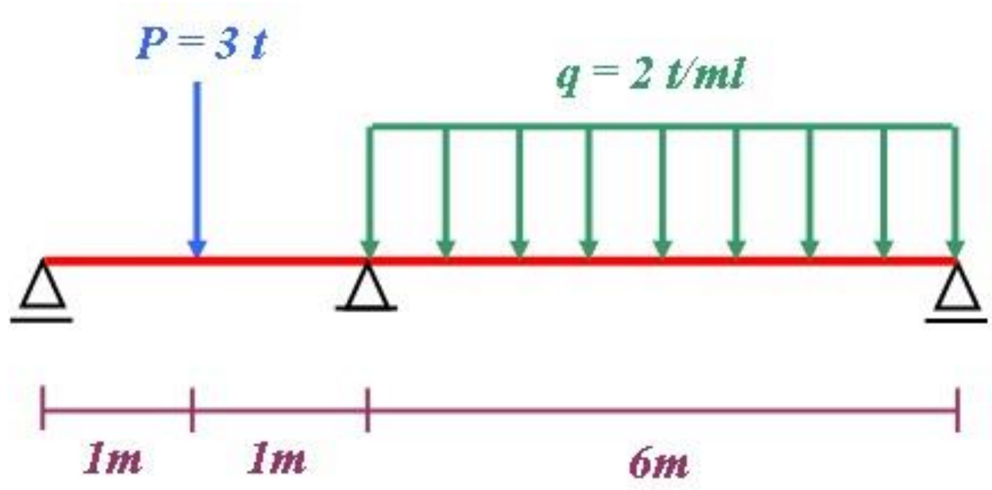


3- Etablissement de la formule des trois moments

Dans le cas d’une poutre continues à deux travées avec trois appuis (l’un doit être un appui double afin d’assurer la stabilité et l’équilibre de la structure), la formule des trois moments devient.

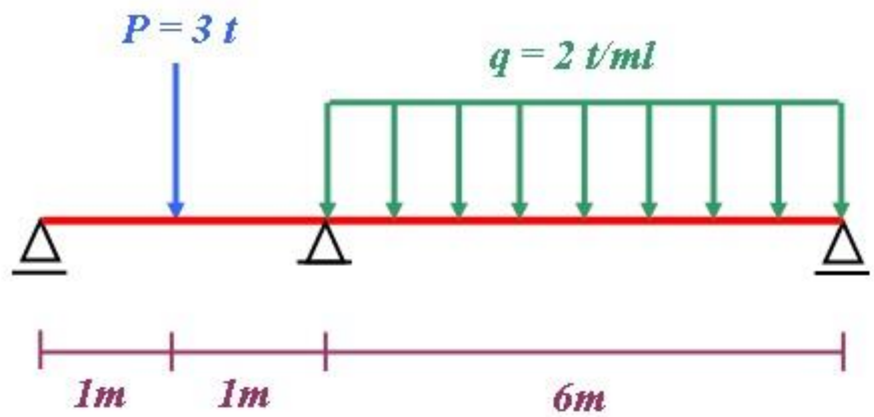
$$M_{i-1}\, l_i + 2M_i\,(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}\, l_{i+1} = \frac{-6}{l_i}\int_0^{l_i} Mx\,dx - \frac{6}{l_{i+1}}\int_0^{l_i} M'(l_{i+1} - x)\,dx$$

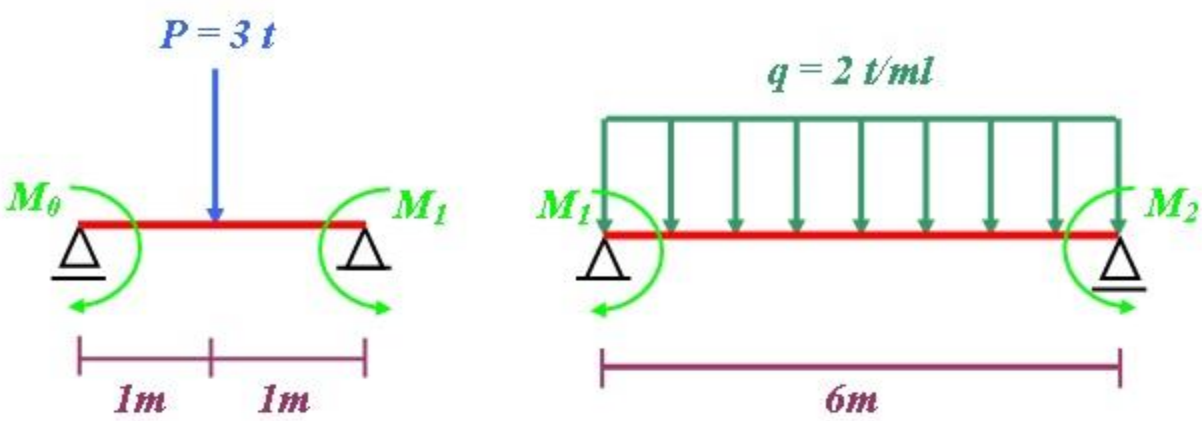
Exercice: Déterminer les réactions d’appuis de la poutre continues ci-dessous.



3- Etablissement de la formule des trois moments

Solution: Dans ce genre d'exercice, en doit en premier calculer les moments M_0, M_1 et M_2 ensuite les appuis R_0,R_1 et R_2.





3- Etablissement de la formule des trois moments

*Recherche des moments

$M_0=M_2=0$

1ère travée

$0 \le x < 1m$

$M(x) = 1.5x$

$1 \le x < 2m$

$M(x) = 1.5x - 3(x-1)$

$$\int_0^2 M.x.dx = \int_0^1 1.5x.x.dx + \int_1^2 (-1.5x+3).x.dx$$

$$\int_0^2 M.x.dx = 1.5$$

2ème travée

$0 \le x < 6m$

$M(x) = 6x - x^2$

$$\int_0^6 M'.(l-x).dx = \int_0^6 (6x - x^2).(6-x).dx$$

$$\int_0^6 M'.(l-x).dx = 108$$

$$M_{i-1}\, l_i + 2M_i\,(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}\, l_{i+1} = \frac{-6}{l_i}\int_0^{l_i} Mx\,dx - \frac{6}{l_{i+1}}\int_0^{l_i} M'(l_{i+1}-x)dx$$

$$2M_1(2+6) = \frac{-6}{2}(1.5) - \frac{6}{6}(108)$$

$$M_1 = -7.03 \ \ t.m$$

3- Etablissement de la formule des trois moments

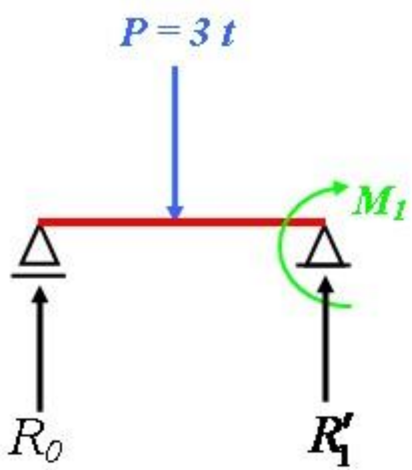
*Recherche des réactions

1ère travée

$$R_0 + R_1^{'} = 3$$

$$\sum M/1 = 0 \Rightarrow -2R_0 - M_1 + 3 = 0$$

$$R_0 = -2.015\ t; \quad R_1^{'} = 5.015\ t$$

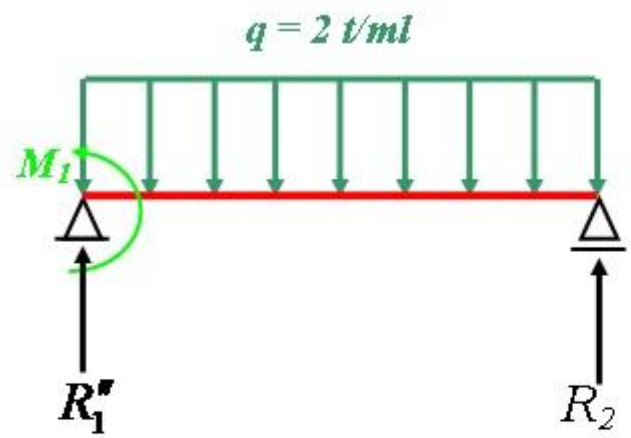


2ème travée

$$R_2 + R_1^{''} = 12$$

$$\sum M/1 = 0 \Rightarrow 6R_2 + M_1 - 36 = 0$$

$$R_2 = 4.828\ t; \quad R_1^{'} = 7.172\ t$$



$$R_0 = -2.015\ t; \quad R_1 = 12.187\ t; \quad R_2 = 4.828\ t$$


Merci