Ch5 : Courbes de Bézier (Polynôme de Bézier)

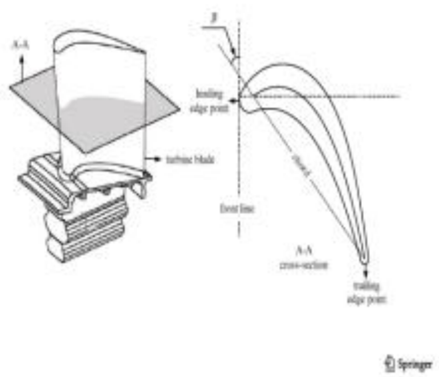
Les courbes de Bézier sont utilisées dans de très nombreuses applications :

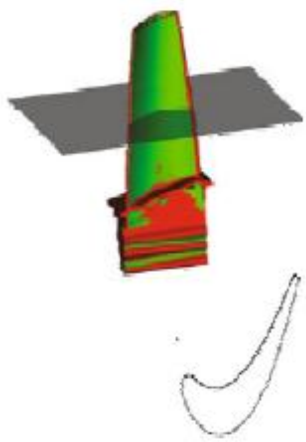
- *commandes de machines numériques ;*
- *programmes de dessin vectoriel (segments courbes) ;*
- *polices True-type ;*
- *morphing : déformation d'images.*

Le concept a été développé initialement dans le cadre de la construction automobile en France à partir des années 60, par des ingénieurs (Bézier chez Renault, de Casteljau chez Citroën) qui cherchaient à définir de la manière la plus concise les courbes des carrosseries.

Exemple d'utilisation

Exemple des surfaces gauches (courbe de Bézier) MOCN :





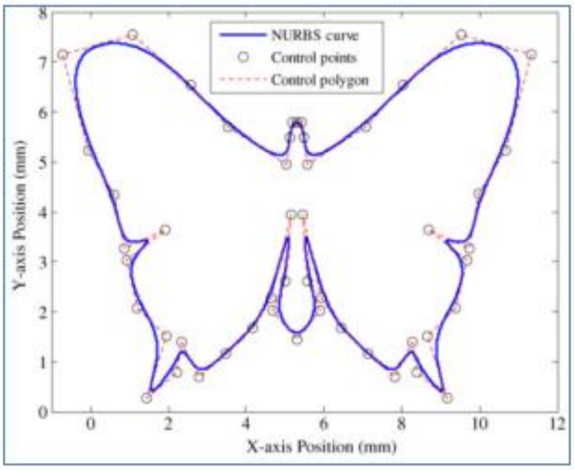


Figure I. 47– Contour en forme de papillon en courbe NURBS [64]

NC codes of the butterfly NURBS curve

```
G06.3 P4   K0.000000  X34.493    Y52.139 Z0.000  R1.000  F900
K0.000000  X55.507    Y52.139 Z0.000  R1.000
K0.000000  X56.082    Y49.615 Z0.000  R1.000
K0.000000  X56.780    Y44.971 Z0.000  R1.200
K0.008286  X69.575    Y51.358 Z0.000  R1.000
K0.014978  X77.786    Y58.573 Z0.000  R1.000
K0.026118  X90.526    Y67.081 Z0.000  R1.000
K0.085467  X105.973   Y63.806 Z0.000  R1.000
K0.129349  X100.400   Y47.326 Z0.000  R1.000
K0.150871  X94.567    Y39.913 Z0.000  R1.000
K0.199075  X92.349    Y30.485 Z0.000  R1.000
K0.227259  X83.440    Y33.757 Z0.000  R2.000
K0.240467  X91.892    Y28.509 Z0.000  R1.000
K0.256080  X89.444    Y20.398 Z0.000  R1.000
K0.269242  X83.218    Y15.446 Z0.000  R5.000
K0.288858  X87.621    Y4.830 Z0.000   R3.000
K0.316987  X80.945    Y9.267 Z0.000   R1.000
K0.321643  X79.834    Y14.535 Z0.000  R1.100
K0.348163  X76.074    Y8.522 Z0.000   R1.000
K0.355261  X70.183    Y12.550 Z0.000  R1.000
K0.364853  X64.171    Y16.865 Z0.000  R1.000
K0.380666  X59.980    Y22.122 Z0.000  R1.000
K0.400499  X55.680    Y36.359 Z0.000  R1.000
K0.438851  X56.925    Y24.995 Z0.000  R1.000
K0.451038  X59.765    Y19.828 Z0.000  R1.000
K0.465994  X54.493    Y14.940 Z0.000  R1.000
K0.489084  X49.220    Y19.828 Z0.000  R1.000
K0.499973  X52.060    Y24.994 Z0.000  R1.000
K0.510862  X53.305    Y36.359 Z0.000  R1.000
K0.533954  X48.982    Y22.122 Z0.000  R1.000
```

Figure I. 48–. Programme NC en format NURBS utilisant la fonction bloc G6.3 [64]

Résultat de l'usinage du profile papillon :

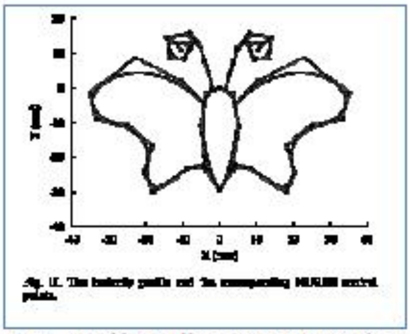
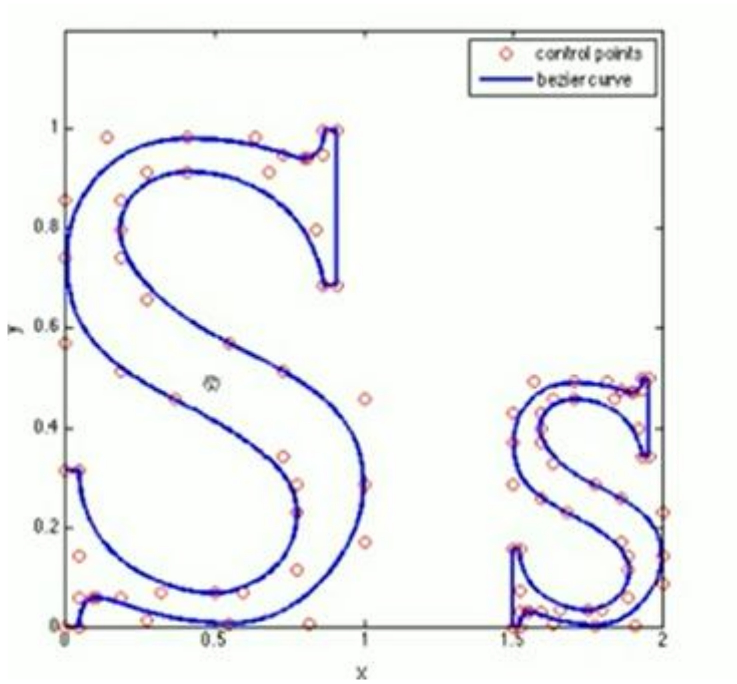
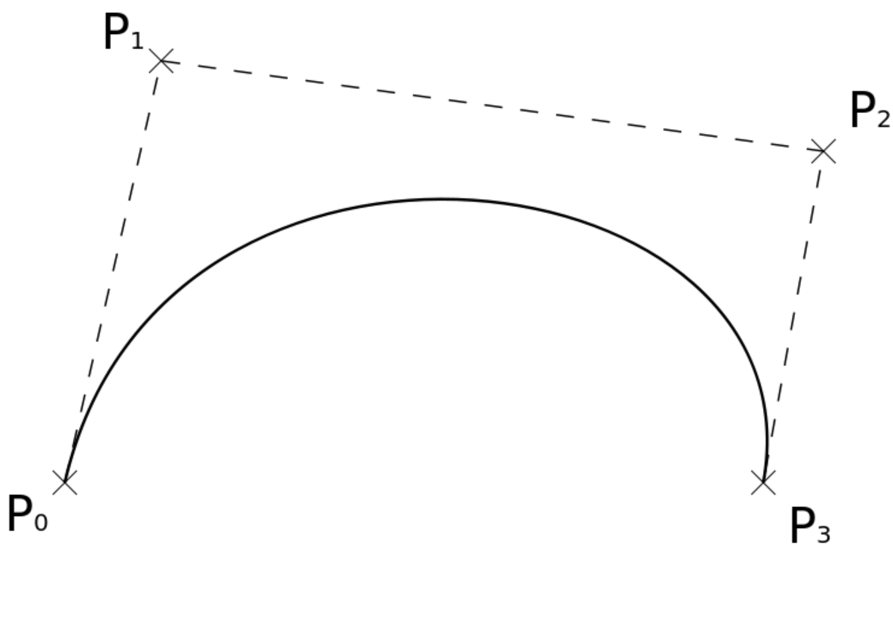


Figure I. 43–Profil papillon etces points de contrôles en NURBS. [61]

Figure I. 44–Résultat de l'usinage du profile papillon. [61]

Exemple de TrueType (police de caractère)


control points
bezier curve
x
y


P_1
P_2
P_0
P_3

Les courbes de Bézier de degré 1

Courbe de Bézier linéaire (de degré 1)

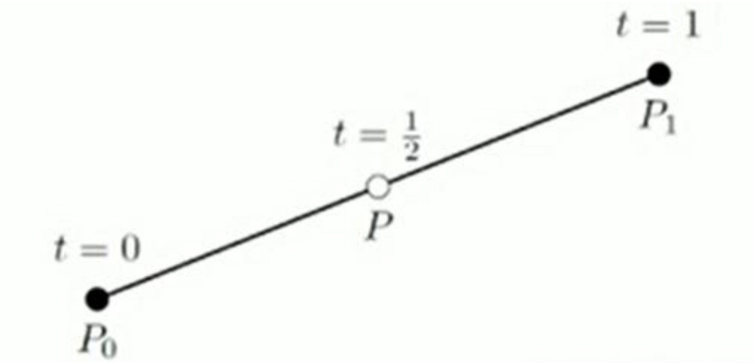
Les points de contrôle $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}_1$ définissent la courbe de Bézier donnée par l'équation :

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, \; t \in [0,1].$$

Il s'agit donc du segment [P0, P1].

$$x(t) = (1-t)x_0 + tx_1,$$
$$y(t) = (1-t)y_0 + ty_1,$$

Avec $0 \leq t \leq 1$; $P_0=(x_0,y_0)$, $P_1=(x_1,y_1)$ et $P= (x,y)$ alors

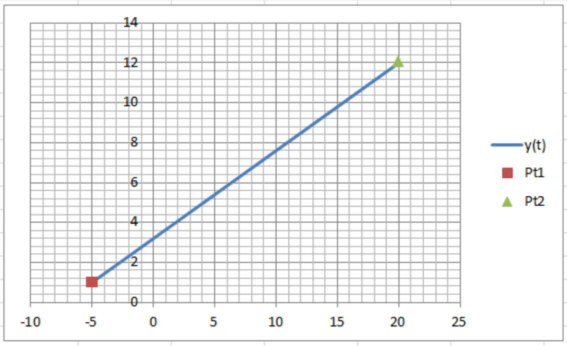


Pour bien comprendre l'exemple, on refaire le calcul sur Excel : changer les valeurs de x et y des points P_0 et P_1

	P_0	P_1
x	-5	20
y	1	12

$$x(t) = (1-t)x_0 + tx_1,$$
$$y(t) = (1-t)y_0 + ty_1,$$

t	x(t)	y(t)
0	-5	1
0.2	0	3.2
0.4	5	5.4
0.6	10	7.6
0.8	15	9.8
1	20	12



Les courbes de Bézier de degré 2

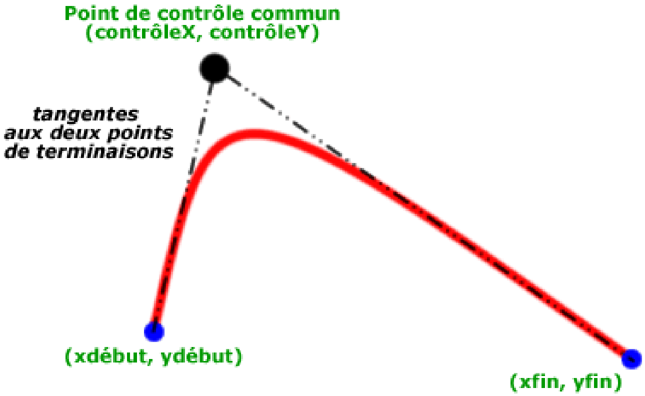
Courbe de Bézier quadratique (de degré 2)

Une courbe de Bézier quadratique est la courbe $\mathbf{B}(t)$ définie par les points de contrôle $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$.

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P_0} + 2t(1-t)\mathbf{P_1} + t^2\mathbf{P_2},\ t \in [0,1].$$

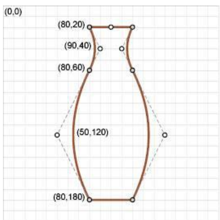
$$x(t) = (1-t)^2 x_0 + \ 2t(1-t)x_1 + t^2 x_2$$

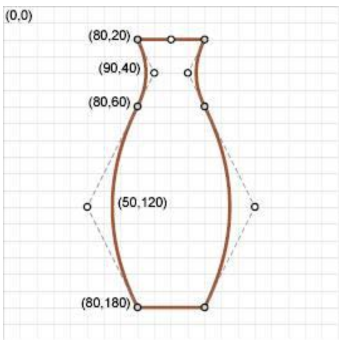
$$y(t) = (1-t)^2 y_0 + \ 2t(1-t)y_1 + t^2 y_2$$

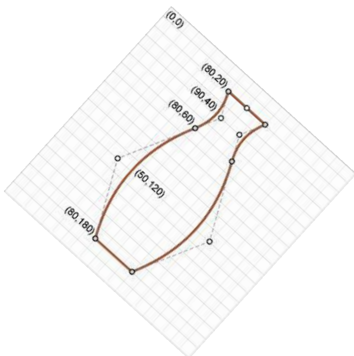


Courbe quadratique

Quelques objets réalisés par des courbes de Béziers quadratiques, ensuite on applique une transformation géométrique sur l'objet réalisé. (Agrandissement, rotation, symétrie … etc)







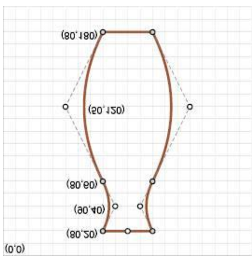
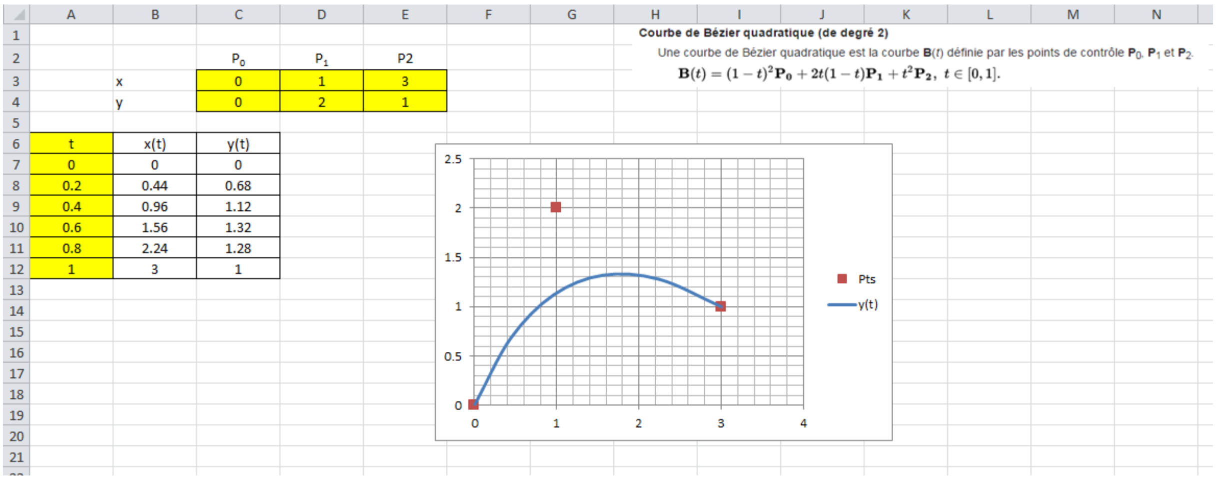


Figure initiale l'image



Les courbes de Bézier de degré 3

Courbe de Bézier cubique (de degré 3)

Une courbe de Bézier cubique est la courbe **B**(t) définie par les points de contrôle $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$. Sa forme paramétrique est :

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1}t(1-t)^2 + 3\mathbf{P_2}t^2(1-t) + \mathbf{P_3}t^3,\ t \in [0,1].$$

Les *courbes de Bézier* de degré 3. Elles sont donc déterminées par quatre *points de contrôle*. La courbe déterminée par les points P_1, P_2, P_3 et P_4 va de P_1 à P_4 et ses dérivées en P_1 et P_4 sont respectivement $3(P_2 - P_1)$ et $3(P_3 - P_4)$. Ceci signifie en particulier que la courbe est tangente en P_1 et P_4 aux droites P_1P_2 et P_3P_4.

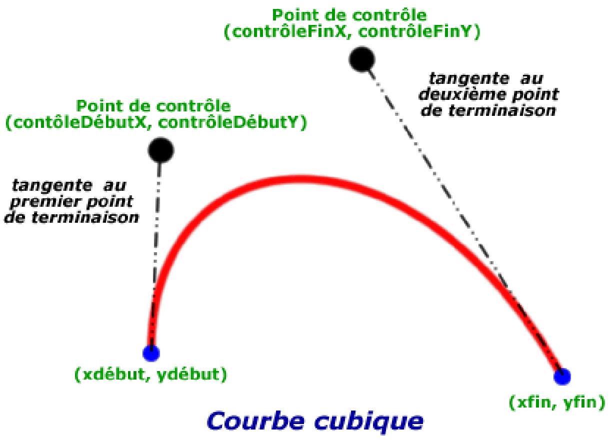


Fig. 1 : Courbe de Bézier cubique

Si les coordonnées des points de contrôle sont (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) et (x_4, y_4), l'équation de la courbe est

$$x(t) = (1-t)^3x_1 + 3t(1-t)^2x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3x_4 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$
$$y(t) = (1-t)^3y_1 + 3t(1-t)^2y_2 + 3t^2(1-t)y_3 + t^3y_4 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

L'applette ci-dessous permet d'expérimenter la forme de la courbe de Bézier en fonction de la position des points de contrôle. La courbe évolue lorsque les points de contrôle sont déplacés à la souris.

3 Exemples

Après avoir déterminer leurs équations paramétriques, tracer les courbes de Bézier suivantes, définies par les points de contrôle :

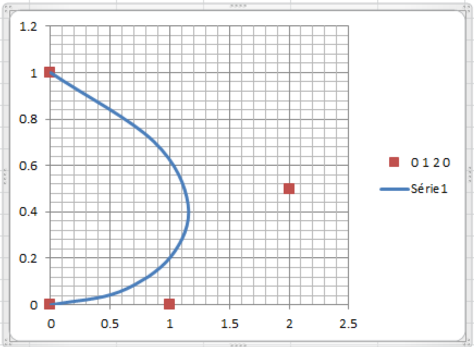
1. $P_0(0;0)$, $P_1(2;0)$, $P_2(1;1)$
2. $P_0(0;0)$, $P_1(2;-1)$, $P_2(1;1)$
3. $P_0(-1;0)$, $P_1(0;1)$, $P_2(1;1)$
4. $P_0(0;0)$, $P_1(1;0)$, $P_2(2;1)$, $P_3(0;1)$
5. $P_0(0;0)$, $P_1(2;2)$, $P_2(2;0)$, $P_3(0;2)$
6. $P_0(0;0)$, $P_1(2;0)$, $P_2(2;2)$, $P_3(0;2)$
7. $P_0(0;0)$, $P_1(2;2)$, $P_2(1;0)$, $P_3(3;1)$
8. $P_0(0;0)$, $P_1(2;0)$, $P_2(-2;2)$, $P_3(0;2)$
9. $P_0(0;-1)$, $P_1(1;1)$, $P_2(0;0)$, $P_3(-1;0)$, $P_4(0;1)$

	A	B	C	D	E	F
1						
2			P_0	P_1	P_2	P_3
3		x	0	1	2	0
4		y	0	0	0.5	1
5						
6	t	x(t)	y(t)			
7	0	0	0			
8	0.2	0.576	0.056			
9	0.4	1.008	0.208			
10	0.6	1.152	0.432			
11	0.8	0.864	0.704			
12	1	0	1			

Courbe de Bézier cubique (de degré 3)

Une courbe de Bézier cubique est la courbe **B**(t) définie par les points de contrôle $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ et $\mathbf{P}_3$. Sa forme paramétrique est :

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1}t(1-t)^2 + 3\mathbf{P_2}t^2(1-t) + \mathbf{P_3}t^3,\ t \in [0,1].$$



Courbe de Bézier de degré supérieur à 3

Elles sont rarement utilisées. On préfère se ramener à l'utilisation de courbes cubiques que l'on raccorde afin de conserver le bénéfice de la continuité de courbure. Pour cela, il faut et il suffit que le dernier point d'une courbe soit le premier d'une autre. On obtient ainsi une courbe continue.

Par exemple, pour une courbe définie par les points A, B, C, D, E, F et G, on utilise les courbes cubiques définies par A, B, C, et D, et par D, E, F, et G et la continuité est ainsi assurée.

Pour *n+1* points de contrôle ($\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n$), on définit une courbe de Bézier par l'ensemble des points $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t).\mathbf{P}_i$, avec $t \in [0,1]$ et où les B_i^n sont les polynômes de Bernstein.

La suite des points $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n$ forme le « **polygone de contrôle** de Bézier ».

Polynômes de Bernstein

Définition

Les polynômes de Bernstein sont définis par les formules suivantes :

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N},\ i \leq n$$

$$\text{et} \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad \text{appelé } \textbf{coefficient binomial}$$

Pour n=1 C(t)= $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t).\mathbf{P}_i$ C(t)= $B_{0,1}$(t).P_0+ $B_{1,1}$(t).P_1 C(t)= $(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$	$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ $B_{0,1}$(t)= $\binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0}= (1-t)$ $B_{1,1}$(t)= $\binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1}= t$ $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$
Pour n=2 ; C(t)= $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t).\mathbf{P}_i$ C(t)= $B_{0,2}$(t). P_0+ $B_{1,2}$(t). P_1 + $B_{2,2}$(t). P_2 C(t)= $(1-t)^2\mathbf{P_0} + 2t(1-t)\mathbf{P_1} + t^2\mathbf{P_2}$	$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ $B_{0,2}$(t)= $\binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0}= (1-t)^2$ $B_{1,2}$(t)= $\binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1}= 2t(1-t)$ $B_{2,2}$(t)= $\binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2}= t^2$

Pour n=3 ; C(t)= $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t).\mathbf{P}_i$ C(t)= $B_{0,3}(t).\ P_0 + B_{1,3}(t).\ P_1 + B_{2,3}(t).\ P_2 + B_{3,3}(t).\ P_3$ C(t)= $\mathbf{P_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1}t(1-t)^2 + 3\mathbf{P_2}t^2(1-t) + \mathbf{P_3}t^3,$	$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ $b_{0,3}(t) = \binom{3}{0} t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3,$ $b_{1,3}(t) = \binom{3}{1} t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2,$ $b_{2,3}(t) = \binom{3}{2} t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t),$ $b_{3,3}(t) = \binom{3}{3} t^3(1-t)^{3-3} = t^3,$ $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Expression matricielle de la courbe de Bézier :

$$C(t) = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-1} & P_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} t^n \\ t^{n-1} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix},$$

M est une matrice (n+1) x (n+1)

On considère une courbe de Bézier quadratique (de degré 2)

Une courbe de Bézier quadratique est la courbe C(t) définie par les points de contrôle P_0, P_1 et P_2.

C(t)= $(1-t)^2\mathbf{P_0} + 2t(1-t)\mathbf{P_1} + t^2\mathbf{P_2}$

On peut l’écrire de la façon suivante :

$$C(t) = (t^2 - 2t + 1)P_0 + (-2t^2 + 2t)P_1 + t^2 P_2,$$

On peut l’écrire sous forme d’une matrice :

$$C(t) = (P_0 \quad P_1 \quad P_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D’une façon similaire on peut écrire sous forme matricielle pour une courbe de Bézier cubique :

C(t)= $\mathbf{P_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1}t(1-t)^2 + 3\mathbf{P_2}t^2(1-t) + \mathbf{P_3}t^3,$

$$C(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1 + (-3t^3 + 3t^2)P_2 + t^3 P_3$$

$$C(t) = (P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C(t)= (P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1 + (-3t^3 + 3t^2)P_2 + t^3 P_3$$

$$C(t) = (-t^3+3t^2-3t+1)\ P_1 + (3t^3-6t^2+3t)\ P_2 + (-3t^3+3t^2)\ P_3 + t^3P_4$$