Analyse de Fourier

Une partie du cours + exercies:

Madani Moussai

Notations

– Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
– Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times ... \times x_n^{\alpha_n}$.
– Les dérivées partielles $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_1} f$, ..
– $g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y$ est la convolution.
– L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (la classe de Schwartz) est muni par les normes

$$\zeta_M(f) := \sup_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha f(x)| \qquad (M \in \mathbb{N}).$$

Chapitre 1

Espaces de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition et quelques propriétés

Définition 1.1 *On définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} < +\infty.$$

Voici quelques observations :

(i) $\| - \|_{H^s}$ est une norme.

(ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. En effet, il suffit de vérifier que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est complet. Soit $\{f_n\}_n$ uns suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. Comme $L_2(\mathbb{R}^n)$ est complet, alors $\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f_n}\}_n$ est de Cauchy converge vers une limite dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ notée g. On pose $f(x) := \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}g(\xi)](x)$. Mais $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme, donc $(1+|\xi|^2)^{-s/2}\widehat{f} = g \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.1 *$s > t \Rightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que $(1+|\xi|^2)^{s/2} \geq (1+|\xi|^2)^{t/2}$. ■

Proposition 1.2 *$f \in H^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f^{(\alpha)} \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que $\mathcal{F}(f^{(\alpha)}) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$, et que

$$(1+|\xi|^2)^{(s-|\alpha|)/2}|\xi|^{|\alpha|} = (1+|\xi|^2)^{(s-|\alpha|)/2}(|\xi|^2)^{|\alpha|/2} \leq (1+|\xi|^2)^{s/2}.$$

Ce qui donne

$$\|f^{(\alpha)}\|_{H^{s-|\alpha|}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\xi|^{|\alpha|}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq \|f\|_{H^s}.$$

■

Proposition 1.3 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note par $W^m(\mathbb{R}^n)$ l'espace défini par*

$$\|f\|_{W^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|f^{(\alpha)}\|_2 < +\infty.$$

Si $s = m \in \mathbb{N}^*$ alors $H^s(\mathbb{R}^n) = W^m(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Nous allons faire une démonstration pour $n = m = 1$. On va utiliser les égalités

$$\widehat{f'} = i\xi\widehat{f}, \quad \|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2, \quad \|f'\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2 = \|\xi\widehat{f}\|_2.$$

On a
- $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \leq \|(1+|\xi|^2)^{1/2}\widehat{f}\|_2 = \|f\|_{H^1}$
- $\|f'\|_2 = \|\xi\widehat{f}\|_2 = \|(|\xi^2|)^{1/2}\widehat{f}\|_2 \leq \|(1+|\xi|^2)^{1/2}\widehat{f}\|_2 = \|f\|_{H^1}$

donc, $\|f\|_{W^1} \leq 2\|f\|_{H^1}$. Inversement, comme

$$(1+|\xi|^2)|\widehat{f}(\xi)|^2 = |\widehat{f}(\xi)|^2 + |\xi|^2|\widehat{f}(\xi)|^2,$$

il vient
- $\|f\|_{H^1}^2 = \|(1+|\xi|^2)^{1/2}\widehat{f}\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 + \|\xi\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 \leq 2(\|f\|_2 + \|f'\|_2)^2 = 2\|f\|_{W^1}^2$

donc, $\|f\|_{H^1} \leq \sqrt{2}\|f\|_{W^1}$. ■

On termine ce paragraphe par un exemple explicite, surtout, on insiste sur le calcul de la transformation de Fourier d'une fonction intégrable, en utilisant les intégrales sur le corps $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1 Soit $f(x) := e^{-x}$ pour $x \geq 0$, et paire sur $\mathbb{R}$.
- Calculons d'abord $\widehat{f}$: On a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty (e^{-ix\xi} + e^{ix\xi})e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}\Big(2\mathcal{R}e\, e^{-ix\xi}\Big)dx = 2\mathcal{R}e\int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x}dx.$$

Comme f est réelle et paire, elle on ait aussi $\widehat{f}$. Donc on peut supposer que $\xi \geq 0$. On intègre la fonction holomorphe e^{-z} sur le contour suivant (noté C) :
– du point $z_1 = 0$ au point $z_2 = R(1+i\xi)$
– puis le contour du cercle $C_1 := C(0, R\sqrt{1+\xi^2})$: du point $z_2 = R(1+i\xi)$ au point $z_3 = R\sqrt{1+\xi^2}$
– puis le segment du point $z_3 = R\sqrt{1+\xi^2}$ au point $z_1 = 0$.
Nous avons $\int_C e^{-z}dz = 0$, ou encore

$$(1+i\xi)\int_0^R e^{-(1+i\xi)x}dx + \int_{C_1} e^{-z}dz + \int_{R\sqrt{1+\xi^2}}^0 e^{-x}dx = 0.$$

Sur C_1, on a $\mathcal{R}e\, z \geq R$, donc

$$|e^{-z}| = e^{-\mathcal{R}e\, z} \leq e^{-R} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad R \to +\infty \Rightarrow \int_{C_1} e^{-z}dz \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

On a aussi

$$\int_{R\sqrt{1+\xi^2}}^0 e^{-x}dx \to -\int_0^\infty e^{-x}dx = -1 \quad (R \to +\infty).$$

Enfin on a

$$(1+i\xi)\int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x}dx = 1.$$

Comme $(1+i\xi)^{-1} = (1+\xi^2)^{-1}(1-i\xi)$, alors on

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\,.$$

Voyons maintenant quand $f \in H^s(\mathbb{R})$: Il faut étudier la convergence de l'intégrale

$$J := \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^2}d\xi = 2\int_0^\infty (1+\xi^2)^{s-2}d\xi = 2\Big(\int_0^1 ... + \int_1^\infty ...\Big),$$

la partie $\int_0^1 ...$ est définit et elle converge. Par contre

$$\int_1^\infty (1+\xi^2)^{s-2}d\xi \sim \int_1^\infty \xi^{2s-4}d\xi = \frac{1}{2s-3}\xi^{2s-3}\Big|_1^\infty,$$

d'où la convergence si $s < 3/2$. Conclusion : $f \in H^s(\mathbb{R})$ si $s < 3/2$.

Exercice 1.1.1 Vérifier que (i) est une norme ?
Démontrer que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est espace de Hilbert en donnant le produit scalaire convenable ?

Exercice 1.1.2 Faire l'Exemple 1.1 dans les cas suivants :
– $f(x) := e^{-x}$ pour $x \geq 0$, et impaire sur $\mathbb{R}$.
– $f(x) := xe^{-x}$ pour $x \geq 0$, et paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1.3 Faire une démonstration de la Proposition 1.3 pour $n = 1$ et $m = 2$.

Exercice 1.1.4 Soient $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $a_j \geq 0$ avec $|\alpha| \leq m$ et $j = 1, ..., n$. Démontrer par récurrence que

$$a_1^{2\alpha_1} \times ... \times a_n^{2\alpha_n} \leq (1 + a_1^2 + ... + a_n^2)^m \leq c\Big(1 + \sum_{|\alpha|\leq m} (a_1^{2\alpha_1} \times ... \times a_n^{2\alpha_n})\Big).$$

Déduire la preuve de la Proposition 1.3 dans le cas général.