1.2 Injection de Sobolev

On commence par la propriété suivante sur la transformation de Fourier :

Proposition 1.4 *$f \in L_1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{f} \in C$; de même pour $\mathcal{F}^{-1}f$.*

Preuve. Nous avons

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix.\xi} - e^{-ix.\eta}||f(x)|dx.$$

Comme $|e^{-ix.\xi} - e^{-ix.\eta}||f(x)| \leq 2|f(x)|$, le théorème de la convergence dominée s'applique (puisque $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$) et donne la convergence uniforme de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^n$. ■

Proposition 1.5 *Soit $|\alpha| \leq m$. Si $f, \dots, f^{(\alpha)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ alors*

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq c\frac{1}{|\xi|^m}\|\widehat{f^{(\alpha)}}\|_1, \tag{1.1}$$

de plus $\lim_{|\xi|\to+\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| = 0$.

Preuve. La preuve est simple et laisée en exercice. ■

On arrive à l'injection de Sobolev : On introduit d'abord l'espace suivant :

$$C_0^m := \left\{f \in C^m, \quad \text{telle que} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\right\}.$$

Théorème 1.1 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, $s > m + \frac{n}{2} \Rightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^m$.*

Preuve. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On part de la formule $\mathcal{F}(f^{(\alpha)}) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$, pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} (1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{f}(\xi)|d\xi. \tag{1.2}$$

Par Cauchy-Schwartz, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|d\xi\right)^2 \leq \|f\|^2_{H^s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi. \tag{1.3}$$

Il reste alors d'étudier la convergence de l'intégrale dans (1.3). Nous allons utiliser le changement de varibles en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi = \int_{S^{n-1}} dy' \int_0^\infty \frac{r^{n-1+2|\alpha|}}{(1+r^2)^s} dr. \tag{1.4}$$

(Pour la formule (1.4), voir le chapitre suivant). Nous avons

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1+2|\alpha|}}{(1+r^2)^s} dr = \int_0^1 ... + \int_1^\infty ... =: I_1 + I_2.$$

I_1 converge, et

$$I_2 \sim \int_1^\infty r^{n-1+2|\alpha|-2s} dr = \frac{1}{n+2|\alpha|-2s} r^{n+2|\alpha|-2s}\Big|_1^\infty ;$$

d'où la condition $n + 2|\alpha| - 2s < m$ c'est-à-dire $s > m + n/2$. Maintenant il suffit d'appliquer la Proposition 1.4 à la fonction $\widehat{f^{(\alpha)}}$, en effet $\widehat{f^{(\alpha)}} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ entraîne $f^{(\alpha)}$ est de classe C^0.
Pour la condition $\lim_{|\xi|\to+\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| = 0$, il suffit d'appliquer (1.1). ∎

Corollaire 1.1 *L'application $\mathcal{F}$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. De la formule (1.3), avec $\alpha = 0 \in \mathbb{N}^n$, on a le résultat. ∎

Nous allons généraliser le Théorème 1.1 aux cas des espaces $L_q(\mathbb{R}^n)$ aux lieu des C_0^m. On admet le résultat suivant :

$$\mathcal{F}^{-1} : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n), \qquad 1 \le p \le 2\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{1.5}$$

La preuve de (1.5) est par l'interpolation de Riesz-Thorin.

Théorème 1.2 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \le q \le \infty$. Alors, $s > n/2 - n/q \Rightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. D'après (1.5), nous avons $\|\mathcal{F}^{-1}g\|_q \le c\|g\|_p$ (n'oublions pas $1/p + 1/q = 1$). On pose $f := \mathcal{F}^{-1}g$ et on utilise l'inégalité de Hölder avec

$$v := 2/p,\ w := 2/(2-p)\,, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\Big)^{1/q} &\le c\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{ps/2}} \left[(1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{f}(\xi)|\right]^p \mathrm{d}\xi\Big)^{1/p} \\
&\le c\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \left[(1+|\xi|^2)^{pvs/2}|\widehat{f}(\xi)|\right]^{pv} \mathrm{d}\xi\Big)^{1/(pv)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{wsp/2}} \,\mathrm{d}\xi\Big)^{1/(pw)} \\
&= c\|f\|_{H^s} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{wsp/2}} \,\mathrm{d}\xi\Big)^{1/(pw)}.
\end{aligned}$$

Comme dans (1.4) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{wsp/2}} \,\mathrm{d}\xi = \int_{S^{n-1}} dy' \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{wsp/2}} dr.$$

La derinère intégrale converge si $n - pws < 0$, c'est-à-dire $s > n/w$, ou encore $s > n/p - n/2 = n/2 - n/q$. ∎

Nous allons aussi étendre le Théorème 1.1 aux cas de l'espace de Potentiel de Bessel. On commence par la remarque suivante :

Remarque 1.1 On désigne par Δ le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$. Il vient alors, d'après *la théorie des opérateurs pseudo-différentiels* que

$$\mathcal{F}\big((1-\Delta)^{s/2}f\big)(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi), \tag{1.6}$$

cette formule est justifiée par le fait que

$$\mathcal{F}\big(-\Delta f\big)(\xi) = |\xi|^2\widehat{f}(\xi) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n); \tag{1.7}$$

ceci rendre la Définition 1.1 équivalente à : On définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1-\Delta)^{s/2}f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty,$$

où nous avons utilisé la formule (1.6) et l'égalité de Perseval.

Définition 1.2 *Soit $1 \le p < \infty$. On définit l'espqce de Potentiel de Bessel $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ par l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{H^s_p} := \|(1-\Delta)^{s/2}f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1-\Delta)^{s/2}f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

Par les propriétés de $L_p(\mathbb{R}^n)$, on obtient que $\|-\|_{H^s_p}$ est une norme. L'esopace $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ est de Banach. Il suffit de raisonner comme dans le cas des espaces de Sobolev.

Exercices

Exercice 1.2.1 Démontrer la formule (1.4) pour :
– $n = 2$, ici les coordonnées polaires,
– $n = 3$, ici les coordonnées sphériques.

Exercice 1.2.2 Appliquer le Théorème 1.1 à la fonction obtenue dans
– l'Exemple 1.1,
– l'Exercice 1.1.2.

Exercice 1.2.3 Faire une démonstration de la Proposition 1.5, en particulier la formule (1.1).

Exercice 1.2.4 Démontrer la formule (1.7) pour $s = m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^m f\big)(\xi) = |\xi|^{2m}\widehat{f}(\xi) \qquad (\forall\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Exercice 1.2.5 Refaire les calculs dans la preuve du Théorème 1.2 pour $n = 2$ et $n = 3$, cf. voir l'Exercice 1.2.1.

Exercice 1.2.6 (* Question difficile). Comme dans la Proposition 1.3 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \le p \le \infty$. On note par $W^m_p(\mathbb{R}^n)$ l'espace défini par

$$\|f\|_{W^m_p} = \sum_{|\alpha|\le m} \|f^{(\alpha)}\|_p < +\infty.$$

1- Vérifier que $\|-\|_{W^m_p}$ est une norme.
2*- Démontrer que si $1 \le p < \infty$ alors $H^m_p(\mathbb{R}^n) = W^m_p(\mathbb{R}^n)$.
3*- Démontrer que $m > n/2 - n/q \Rightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 1.2.7 (* Exercice difficile). 1- Démontrer que $s > t \Rightarrow H^s_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t_p(\mathbb{R}^n)$.
2- Démontrer que si $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq q \leq \infty$ alors, $s > n/p - n/q \Rightarrow H^s_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$.