1.3 Distributions modulo les polynômes

1.3.1 L'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$

Nous introduisons les notations suivantes : On désigne par
• $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$,
• $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ pour tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré $< m$ (ou $\leq m-1$) avec $m \in \mathbb{N}^*$,
• $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) := \{c\}$ et $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) := \{0\}$.
Il est clair que $m_1 < m_2 \Rightarrow \mathcal{P}_{m_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_{m_2}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.2 Voici quelques exemples dans $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}^2)$: $f_1(x,y) := x + xy^2$, $f_2(x,y) := 1 - 2xy - 3x^3$.

Remarque 1.2 Comme pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times \ldots \times x_n^{\alpha_n}$, alors si $x^\alpha \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ on a $\partial^\beta x^\alpha = 0$ si $|\beta| = m$.

Définition 1.3 *On définit l'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ par les fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ orthogonales à tous polynômes de degré $< m$, i.e.*

$$\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) := \big\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \quad \langle x^\alpha, f \rangle = 0\,,\ |\alpha| < m \big\};$$

l'espace $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ est muni par les mêmes normes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\zeta_M(f) := \sup_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^M |\partial^\alpha f(x)| \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ M \in \mathbb{N}).$$

Gâce à l'égalité $\partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}(-ix^\alpha f)$, cette définition est équivalente à :

$$f \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \quad \textit{alors} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = 0\,,\ |\alpha| < m\,.$$

Proposition 1.6 *Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $f \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_j f \in \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$. En particulier l'opérateur $\partial_j : \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| < m$. On pose :
— $\beta := (1 + \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Alors $|\beta| = |\alpha| + 1 < m + 1$.
— $\partial_1 g := \widehat{f}$, c'est-à-dire $-ix\mathcal{F}^{-1} g = f$.
Il vient alors $\partial^\beta g = \partial^\alpha \partial_1 g = \partial^\alpha \widehat{f}$. Par conséquent $g \in \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$. ■

1.3.2 L'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$

En construisant l'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, nous obtiendrons un espace plus grand que l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.4 *L'espace dual de $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$, noté $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$, est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, on dit que $f \in \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ si l'application, notée encore f et définie par $f : \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$, est continue. $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace de distributions modulos les polynômes de degré $< m$, on dit aussi que $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de distributions modulos les polynômes.*

Nous revenons à la relation entre $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'_{m+1}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \tag{1.8}$$

voir l'Exercice 1.3.2.
Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ on a la relation d'équivalence suivante :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^2 : \quad f = g \text{ in } \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n),$$

il découle alors $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la classe d'équivalence

$$[f]_m := \big\{ f + p : \ \forall p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \big\}, \tag{1.9}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) = \{ [f]_m : \ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \}. \tag{1.10}$$

<u>NB. :</u> S'il n'y a pas de confusion, les éléments de $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ seront notés par $f, g, ...$
Pour la dérivation on peut avoir l'assertion suivante :

Proposition 1.7 *L'opérteur $-\Delta$ envoi $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. Il en est de même pour $(-\Delta)^s$ avec $s \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Comme $\partial^\alpha\big(|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)\big)(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $-\Delta f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, voir (1.7). La même démonstration marche pour $(-\Delta)^s$. ∎

Remarque 1.3 De la Proposition 1.7, on peut définir $(-\Delta)^s$ sur $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\big\langle (-\Delta)^s f, \varphi \big\rangle := \big\langle f, (-\Delta)^s \varphi \big\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.4 De la Proposition 1.7, on peut définir $(-\Delta)^s$ sur $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\big\langle (-\Delta)^s f, \varphi \big\rangle := \big\langle f, (-\Delta)^s \varphi \big\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 1.5 De la formule (1.9) et (1.10), on conclut que l'opérateur

$$T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n) \quad \text{défini par} \quad T : f \mapsto f_{|\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)}$$

est un isomorphisme.

Exercices

Exercice 1.3.1 Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que $f \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ si $\partial^\beta f = 0$ si $|\beta| = m$

Exercice 1.3.2 Démonter que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, et que

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Déduire la formule (1.8).

Exercice 1.3.3 Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \notin \operatorname{supp} f$ alors $\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Voici un exemple de telle fonction : Soit la fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

1. $0 \leq \rho(\xi) \leq 1$,
2. $\rho(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$,
3. $\rho(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 3/2$, i.e. support de ρ est dans la boule $|\xi| \leq 3/2$;

pour construire la fonction ρ, il suffit de poser $\rho(\xi) = g(|\xi|)$ où $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec le support dans $[0, \infty[$ (n'oublions pas que $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$).
On pose $\gamma(\xi) := \rho(\xi) - \rho(2\xi)$, alors on a

1. support de γ est dans la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$,
2. $\gamma(\xi) = 1$ si $3/4 \leq |\xi| \leq 1$.

Enfin $\mathcal{F}^{-1}\gamma \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e. $\varphi = \gamma$.

Exercice 1.3.4 Dans l'Exemple 1.3.3, et à partir de la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

construire explicitement les fonctions ρ et γ.
1- Vérifier qu'on a des fonctions dans $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$.
2- Tester les fonctions ρ', ρ'', ...

Exercice 1.3.5 Soit $m \in \mathbb{N}$. Démonter que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_1^m \varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$. N'oublions pas que $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\partial_1^m f(\xi) := \partial_{\xi_1}^m f(\xi)$.

Exercice 1.3.6 Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, démontrer que $\widehat{x^\alpha} = i^{|\alpha|}(2\pi)^n \delta^{(\alpha)}$. En déduire que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^2 : \quad f = g \text{ in } \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \operatorname{supp} \widehat{f - g} = \{0\}.$$

Exercice 1.3.7 En utilisant la Remarque 1.4, démontrer dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'égalité

$$(-\Delta)^{s_1+s_2} = (-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2}.$$

Faire une comparaison avec la dérivation usuelle.

Exercice 1.3.8 Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur de Riesz par $\mathcal{I}_s := (-\Delta)^{-s/2}$.

1. Démontrer que
$$\widehat{\mathcal{I}_s f}(\xi) := |\xi|^{-s} \widehat{f}(\xi), \qquad (\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)).$$
2. Démontrer que
$$\langle \mathcal{I}_s f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{I}_\varphi \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$
3. En utilisant la Remarque 1.4, démontrer dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'égalité $\mathcal{I}_{s_1+s_2} = \mathcal{I}_{s_1} \circ \mathcal{I}_{s_2}$. Faire une comparaison avec la dérivation usuelle.