1.4 Décomposition de Littlewood-Paley

Dans tout ce qui suit, nous allons utiliser les deux fonctions ρ et γ définies dans l'Exemple 1.3. Si $j \in \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on désigne par g_j la fonction $g_j(x) := 2^{jn} g(2^j x)$, c'est-à-dire $\widehat{g}_j(\xi) = \widehat{g}(2^{-j}\xi)$; is $\lambda > 0$ on désigne aussi par g_λ la fonction $g_\lambda(x) := \lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x)$, c'est-à-dire $\widehat{g}_\lambda(\xi) = \widehat{g}(\lambda\xi)$.

1.4.1 Préparation

On commence par une relation de convolution entre les fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.3 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que l'inégalité*

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c\, 2^{-jN}\, \zeta_{M+n+2}(\varphi)\zeta_M(f)(1+|x|)^{-M+N} \tag{1.11}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que l'inégalité*

$$|\psi_j * f(x)| \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_{M+n+2}(\psi)\zeta_M(f)(1+|x|)^{-M+N} \tag{1.12}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. *Preuve de* (i). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $N \in \mathbb{N}_0$. Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $y \to f(x-y)$ en x, on a

$$\begin{aligned} f(x-y) &= \sum_{|\beta|<N+1} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} f^{(\beta)}(x) \\ &\quad + (N+1) \sum_{|\beta|=N+1} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^N f^{(\beta)}(x-ty)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.13}$$

En remplaçant cette formule dans $\varphi_j * f(x)$ et en tenant compte du fait que $0 \notin \operatorname{supp} \widehat{\varphi}$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \varphi(y)\mathrm{d}y = i^{|\beta|} \widehat{\varphi}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall \beta \in \mathbb{N}), \tag{1.14}$$

on obtient

$$\varphi_j * f(x) = (N+1) \sum_{|\beta|=N+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} (1-t)^N f^{(\beta)}(x-ty)\, \varphi_j(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

On continue en posant $z := 2^j y$, il vient

$$\begin{aligned} |\varphi_j * f(x)| &\leq c_1\, 2^{-jN} \sum_{|\beta|=N+1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (1-t)^N |z|^{|\beta|} \left| f^{(\beta)}(x - 2^{-j}tz)\varphi(z) \right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\ &\leq c_2\, 2^{-jN} \zeta_{N+L}(f) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{N+1} (1+|x-2^{-j}tz|)^{-L} |\varphi(z)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Nous allons utiliser maintenat l'inégalité suivate :

$$1+|x| \leq (1+|x-2^{-j}tz|)(1+|z|), \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0, \forall t \in [0,1], \tag{1.15}$$

il découle

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c_1\, 2^{-jN}(1+|x|)^{-L}\zeta_{N+L}(f)\zeta_{N+L+n+2}(\varphi)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z\,.$$

On pose $M := N+L \in \mathbb{N}$ et comme

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z = \int_{|z|\leq 1} + \int_{|z|\geq 1}\ldots,$$

avec $\int_{|z|\leq 1}\ldots$ converge, car c'est une fonction continue sur un compact, et

$$\begin{aligned}\int_{|z|\geq 1}\frac{|z|^{N+1}}{(1+|z|)^{N+n+2}}\mathrm{d}z &= \int_{S^{n-1}}\mathrm{d}y'\int_1^\infty \frac{t^{n-1}t^{N+1}}{(1+t)^{N+n+2}}\mathrm{d}t\\ &\leq c\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \quad < +\infty,\end{aligned}$$

alors on aura

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c\, 2^{-jN}(1+|x|)^{-M+N}\zeta_M(f)\zeta_{M+n+2}(\varphi) \tag{1.16}$$

c'est le résultat.

Preuve de (ii). Ecrivons (1.13) avec ψ à la place de f. Nous avons maintenant, comme dans (1.14)

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-y)^\beta f(y)\mathrm{d}y = i^{|\beta|}\widehat{f}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall \beta \in \mathbb{N}), \tag{1.17}$$

alors comme aussi dans (1.15), i.e.,

$$1+|x| \leq (1+|x-ty|)(1+2^{-j}|y|), \qquad \forall j \leq 0,\ \forall t \in [0,1],$$

donc nous avons

$$\begin{aligned}|\psi_j * f(x)(x)| &\leq c_1 \sum_{|\beta|=N+1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|y|^{|\beta|}}{\beta!}\left|f(2^{-j}y)\psi^{(\beta)}(x-ty)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\ &\leq c_2\, 2^{jN}\zeta_{N+L}(f)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{|\beta|}\left|\psi^{(\beta)}(x-ty)\right|(1+2^{-j}|y|)^{-L}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

on fait comme dans (i) on a

$$|\psi_j * f(x)(x)| \leq c\, 2^{jN}(1+|x|)^{-M+N}\zeta_M(f)\zeta_{M+n+2}(\psi)$$

c'est le résultat. ■

Dans ce théorème on peut se limter au cas où $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$. C'est le résutat suivant :

Corollaire 1.2 *La formule* (1.11) *est valable* $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$. *La formule* (1.12) *est valable* $\forall f \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'égalité (1.14) est satisfaite pour $|\beta| \leq N$ uniquement, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \varphi(y) \mathrm{d}y = i^{|\beta|} \widehat{\varphi}^{(\beta)}(0) = 0 \qquad (\forall |\beta| \leq N).$$

De même pour (ii) du Théorème 1.3, c'est-à-dire dans (1.17) on a $i^{|\beta|} \widehat{f}^{(\beta)}(0) = 0$ $(\forall |\beta| \leq N)$. ■

Exemple 1.4 1- On prend $\varphi = \gamma$ et $\psi = \rho$ dans le Théorème 1.3.
2- Une application directe du Théorème 1.3 donne une inégalité intéressante : $\forall N \in \mathbb{N}$ il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ telle que

$$|\gamma_j * f(x)| \leq c \min(2^{-jN}, 2^{jN}) \zeta_M(f)(1 + |x|)^{-M+N} \tag{1.18}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}$. On peut aussi se limiter à $f \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$ comme dans le Corolaire 1.2.

1.4.2 Opérateurs de convolution et $L_p(\mathbb{R}^n)$

Nous allons voir des estimations dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ où $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 1.4 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ ($M > N + n/p$) telle que l'inégalité*

$$\|\varphi_j * f\|_p \leq c\, 2^{-jN} \zeta_{M+n+2}(\varphi) \zeta_M(f) \tag{1.19}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ ($M > N + n/p$) telle que l'inégalité*

$$\|\psi_j * f\|_p \leq c\, 2^{jN} \zeta_{M+n+2}(\psi) \zeta_M(f) \tag{1.20}$$

est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. *Preuve de* (i) et (ii). D'après le Théorème 1.3, il suffit de calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^{(M-N)p}} \mathrm{d}x = \int_{|x| \leq 1} + \int_{|x| \geq 1} \ldots,$$

avec $\int_{|x| \leq 1} \ldots$ converge, car c'est une fonction continue sur un compact, et

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{(1 + |x|)^{(M-N)p}} \mathrm{d}x &= \int_{S^{n-1}} \mathrm{d}x' \int_1^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{(M-N)p}} \mathrm{d}t \\ &\leq c \int_1^\infty t^{-(M-N)p+n-1} \mathrm{d}t \quad < +\infty, \end{aligned}$$

qui converge si $M > N + n/p$. ■ ■

Maintenant on considère les applications linéaires

$$T_j : f \to \varphi_j * f\,, \quad U_j : f \to \psi_j * f\,, \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

avec $\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 1.3 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|T_j f\|_p \leq c\, 2^{-jN} \zeta_M(f) \tag{1.21}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|U_j f\|_p \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_M(f) \tag{1.22}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. Application directe du Théorème 1.4. ■

Corollaire 1.4 *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|T_j f\|_p + \|U_j f\|_p \leq c\, 2^{jN} \zeta_M(f) \tag{1.23}$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. En applicant (ii) du Corollaire 1.3 on remarque que dans (1.22) on peut remplacer U_j par T_j puisuqe $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

1.4.3 Partitions de l'unité

Il est claire que $\mathcal{F}^{-1}\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}^{-1}\gamma \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, voir l'Exercice 1.3.3. On cinsidère les applications linéaires

$$Q_j : f \to \gamma_j * f\,, \quad S_j : f \to \rho_j * f\,, \qquad (\forall j \in \mathbb{Z})$$

– avec $\gamma_j(x) := 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j x)$ et $\rho_j(x) := \rho(2^{-j}x)$
– ou $\mathcal{F}\gamma_j(\xi) := \gamma(2^{-j}\xi)$ et $\mathcal{F}\rho_j(\xi) := \rho(2^{-j}\xi)$.
Un calcul simple donne

$$\sum_{j=-M}^{N} \gamma(2^{-j}\xi) = \rho(2^{-N}\xi) - \rho(2^{M+1}\xi) \qquad (\forall M, N \in \mathbb{Z}). \tag{1.24}$$

En faisant tendre N et M vers $+\infty$, et on remarque que

$$\lim_{M\to+\infty} \rho(2^{M+1}\xi) = 0 \qquad si \quad \xi \neq 0$$

$$\lim_{N\to+\infty} \rho(2^{-N}\xi) = \rho(0) = 1 \qquad si \quad \xi \neq 0,$$

il vient alors

Proposition 1.8 *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1\,, \tag{1.25}$$

partion de l'unité homogène

Dans (1.24) on prend $M = -1$ et $N \to +\infty$, il vient alors

Proposition 1.9 *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\rho(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1\,, \tag{1.26}$$

partion de l'unité non homogène

En appliquant le Théorème 1.4 et les Corollaires 1.3 et 1.4, on le résultat suivant :

Théorème 1.5 (i) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|Q_j f\|_p \leq c\, 2^{-jN} \zeta_M(f)$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|S_j f\|_p \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_M(f)$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

(iii) *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \leq c\, 2^{jN} \zeta_M(f)$$

est satisfaite $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Preuve. La preuve est laissée en exercice au lecteur, car c'est les mêmes étapes comme dans le Théorème 1.4 et les Corollaires 1.3 et 1.4. ■

Remarque 1.6 En utisant les inégalités de Hölder, de Young et de Bernstein, on peut démontrer que Q_j et S_j sont bornés uniformément sur $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.10 *Les inégalités suivantes de Hölder, Young et Bernstein respectivement, sont satisfaites.*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \|f\|_p\|g\|_q$ *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $1/p + 1/q = 1$.
2. $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$ *avec* $1 \leq r, p, q \leq \infty$ *et* $1/r + 1 = 1/p + 1/q$.
3. $\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c_0 R^{\alpha+n/p-n/q}\|f\|_p$ *avec* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\operatorname{supp}\widehat{f}$ *est inclu dans la boule* $|\xi| \leq R$, *la constante* c_0 *ne dépend que de* n, p, q.

Preuve. Admis ; voir l'Exercice 1.4.8. ■

On peut étudier la continuitée des opérateurs Q_j et S_j sur les $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.6 *pour tout $j \in \mathbb{Z}$ des opérateurs Q_j et S_j sont continues uniformément sur les $L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Comme $Q_j f = \gamma_j * f$ on a $\|Q_j f\|_r = \|\gamma_j * f\|_r \leq \|f\|_p \|\gamma_j\|_q$ avec $1/r + 1 = 1/p + 1/q$. On a aussi

$$\|\gamma_j\|_q = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j x)|^q \mathrm{d}x\Big)^{1/q} = 2^{jn(1-1/q)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}\gamma(y)|^q \mathrm{d}y\Big)^{1/q}.$$

Mais $1 - 1/q = 1/p - 1/r$, donc $\|Q_j f\|_r \leq \|\gamma\|_q 2^{jn(1/p-1/r)}\|f\|_p$. Or $\|\gamma\|_q = c$. Donc on obtient

$$\|Q_j f\|_r \leq c\, 2^{jn(1/p-1/r)}\|f\|_p.$$

il suffit maintenant de prendre $r = p$, ce qui donne $\|Q_j f\|_p \leq c\,\|f\|_p$. Même démonstrations pour S_j. ■

1.4.4 Convergence de la série de Littlewood-Paley

Ce paragraphe sera donné sous forme de notes, car il est lié aux cours “Espaces de type de Sobolev”.

Pour une fonction f, en multipliant “formelement” les partitions (1.25) et (1.26) par $\widehat{f}$ et en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$, il vient

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j f\,, \tag{1.27}$$

$$f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f\,. \tag{1.28}$$

Théorème 1.7 *1– La série* (1.27) *converge dans* $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$.
2– La série (1.28) *converge dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Admis. ■

Définition 1.5 *Les série* (1.27) *et* (1.28) *sont les décompositions de Littlewood-Paley d'une telle distribution* f.

On peut remplacer S_0 dans (1.28) par S_k.

Proposition 1.11 *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *et tout* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *nous avons*

$$f = S_k f + \sum_{j=1+k}^{\infty} Q_j f\,.$$

Preuve. En sffet dans (1.26) on remplace ξ par $2^{-k}\xi$, on a

$$\rho(2^{-k}\xi) + \sum_{j=1+k}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1\,.$$

Maintenant il suffit de multiplier par $\widehat{f}$ puis appliquer $\mathcal{F}^{-1}$. ■

Exercices

Exercice 1.4.1 Ecrire le Théorème 1.3 en remplaçant φ_j and ψ_j par φ_λ and ψ_λ respectivement où $\lambda > 0$, et donner les formules qui résultent.

Exercice 1.4.2 Ecrire l'Exemple 1.4 avec la fonction $\partial_1\rho$.

Exercice 1.4.3 Pour tout $p \in [1, +\infty[$, démonrter que les applications linéaires T_j ($T_j : f \to \varphi_j * f$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$), sont continues sur $L_p(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\|T_j * f\|_p \leq c\, 2^{-jN} \|f\|_p$$

pour toute $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Ecrire la même chose avec $U_j : f \to \psi_j * f$ ($\forall j \in \mathbb{Z}^-$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Exercice 1.4.4 Dans le Corllaire 1.4, est-ce qu'on peut remplacer dans (1.23), le terme 2^{jN} anec $j \in \mathbb{Z}^-$ par 2^{-jN} avec $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.4.5 Démontrer la formule (1.24).

Exercice 1.4.6 Donner une partition de l'unité homogène du type (1.25), c'est-à-dire, trouver une fonction g du type γ, telle que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(2^{-j}\xi) = 1$.

Exercice 1.4.7 Donner une partition de l'unité homogène du type (1.25) sous forme continue, c'est-à-dire, trouver une fonction g du type γ, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t\xi) \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1\,, \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Exercice 1.4.8 Rechercher dans la bibliographie les preuves des inégalités de Hölder, de Young et de Bernstein.