1.5 Solutions des exercices

Définition et quelques propriétés

1.1.1. $\|-\|_{H^s}$ est une norme, facile. Le produit scalaire usuelle, c'est-à-dire

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s f(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Nous avons alors $\|f\|^2_{H^s} = \langle f, f\rangle$. Il suffit de vérifier que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est complet pour cette norme. En effet si $(f_k)k$ est une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, il en est de même pour la suite $((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}_k)_k$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Le fait que $L_2(\mathbb{R}^n)$ est complet avec les propriétés de la transformation de Fourier donnent le résultat.

1.1.2. 1- $f(x) := e^{-x}$, $x \geq 0$, impaire. Nous avons

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty (e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}) e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x}\Big(2\mathcal{I}m\, e^{-ix\xi}\Big) dx = 2i\mathcal{I}m \int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x} dx.$$

Or d'après l'Exemple 1.1 on a

$$(1+i\xi)\int_0^\infty e^{-(1+i\xi)x} dx = 1.$$

Donc

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\xi}{1+\xi^2}\,.$$

2- $f(x) := xe^{-x}$, $x \geq 0$, paire. On fait avec $\int_C ze^{-z}\,\mathrm{d}z$ comme dans l'Exemple 1.1, on a alors

$$(1+i\xi)^2 \int_0^R xe^{-(1+i\xi)x} dx + \int_{C_1} ze^{-z} dz + \int_{R\sqrt{1+\xi^2}}^0 xe^{-x} dx = 0.$$

maintenant on pose $R \to 0$, il découle

$$\widehat{f}(\xi) = 2\,\mathcal{R}e \frac{1}{(1+i\xi)^2} = 2\,\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

Remarquons que $\widehat{f}$ est réelle et paire.

1.1.3. Suivre les mêmes étapes de la peuve de la Proposition 1.3.

1.1.4. La solution est laissée au lecteur.

Injection de Sobolev

1.2.1. — $n=2$, ici les coordonnées polaires : $\xi_1 = r\cos\theta$, $\xi_2 = r\sin\theta$. Nous avons (n'oubilons pas que $\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^s}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{|\alpha|}}{(1+\xi_1^2+\xi_2^2)^s}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} \frac{r^{2|\alpha|}}{(1+r^2)^s} r\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{r^{1+2|\alpha|}}{(1+r^2)^s}\,\mathrm{d}r.$$

Alors

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{1+2|\alpha|}}{(1+r^2)^s}\,\mathrm{d}r = \int_0^1 ... + \int_1^{\infty} ... =: I_1 + I_2.$$

I_1 converge, et

$$I_2 \sim \int_1^{\infty} r^{1+2|\alpha|-2s}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2+2|\alpha|-2s} r^{2+2|\alpha|-2s}\Big|_1^{\infty}.$$

— $n=3$, ici les coordonnées sphériques ; est laissée au lecteur.

1.2.2. — Nous avons $f(x) := e^{-x}$, $x \geq 0$, paire et $\widehat{f}(\xi) = 2(1+\xi^2)^{-1}$. Voyons quand $f \in H^s(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_{H^s} = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s \frac{4}{(1+\xi^2)^2}\,\mathrm{d}\xi = 8\int_0^{\infty} (1+\xi^2)^{s-2}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

La dernière intégrale converga si $\int_1^{\infty} \xi^{2(s-2)}\,\mathrm{d}\xi < +\infty$, c'est-à-dire $s < 3/2$. Maintenant, si $f \in C_0^m$ il faut que (d'après le Théorème 1.1)

$$m + \frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}\,,$$

comme $m \in \mathbb{N}$ il vient alors que $m = 0$; c'est-à-dire que $f \in C_0^0$ est une fonction continue tend vers 0 à $\pm\infty$.

— $f(x) := e^{-x}$, $x \geq 0$, impaire. Réponse $f \in C_0^0$, comme avant.
— $f(x) := xe^{-x}$, $x \geq 0$, paire. Réponse $f \in C_0^0$, comme avant.

1.2.3. Facile. La solution est laissée au lecteur.

1.7. Soient $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\langle \mathcal{F}\big(-\Delta f\big), \varphi\rangle := \langle -\Delta f, \widehat{\varphi}\rangle = (-1)^2\langle -f, \Delta\widehat{\varphi}\rangle.$$

mais $\Delta\widehat{\varphi}(\xi) = -|\xi|^2\widehat{\varphi}$ (un calcul facile), donc

$$\langle \mathcal{F}\big(-\Delta f\big), \varphi\rangle = \langle f, |\xi|^2\widehat{\varphi}\rangle.$$

Comme la fonction $\xi \mapsto |\xi|^2$ est de calsse C^∞ (n'oublions pas que $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$), on obtient alors

$$\mathcal{F}\big(-\Delta f\big)(\xi) = |\xi|^2\widehat{f}(\xi) \qquad (\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Comme $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a immédiatement

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^2 f\big)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}\big((-\Delta) f\big)(\xi) = |\xi|^2 \Big(|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)\Big) = |\xi|^4 \widehat{f}(\xi),$$

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^3 f\big)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}\big((-\Delta)^2 f\big)(\xi) = |\xi|^2 \Big(|\xi|^4 \widehat{f}(\xi)\Big) = |\xi|^6 \widehat{f}(\xi),$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^m f\big)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}\big((-\Delta)^{m-1} f\big)(\xi) = \ldots = |\xi|^m \widehat{f}(\xi) \qquad (m = 1, 2, \ldots);$$

et on ajoute la récurrence.

1.2.5. Ici il faut faire un changement de variables en coordonnées polaires et sphériques, comme dans 1.2.1 (facile). Les détails sont laissés au lecteur.

1.2.6. S3.

1.2.7. S3.

Distributions modulo les polynômes

1.3.1. On peut raisonner par récurrence sur m.

1.3.2. Nous avons $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ par définition. Soit maintenat $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

dès que $u(x) = 0$, c'est-à-dire $u \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, donc $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, d'où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Les inclusions $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n) \subset \ldots \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'obtiennent grâce à $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{P}_{m+1}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \supset \ldots \supset \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Quant à la formule (1.8), elle découle de la propriété suivante : pour tout E et F deux K-ev, on a

$$E \subset F \Rightarrow E' \supset F'.$$

1.3.3. Pour la fonction ρ on a

$$\rho(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ e^{1 - \frac{1}{1-4(x-1)^2}} & \text{si} \quad 1 \le x < 3/2 \\ 0 & \text{si} \quad x \ge 3/2, \\ \textit{paire} & \end{cases}$$

Pour la fonction γ on a $\gamma(x) := \rho(x) - \rho(2x)$ avec

$$\gamma(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - e^{1-\frac{1}{1-4(2x-1)^2}} & \text{si} \quad 1/2 \leq x < 3/4 \\ 1 & \text{si} \quad 3/4 \leq x < 1 \\ e^{1-\frac{1}{1-4(x-1)^2}} & \text{si} \quad 1 \leq x < 3/2 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 3/2, \\ \textit{paire} & \end{cases}$$

Comme $\gamma^{(m)}(0) = 0$ ($\forall m \in \mathbb{N}$) alors $\mathcal{F}^{-1}\gamma \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$. De même pour ρ' et ρ'' .. (n'oubilons pas que $\rho'(0) = \rho''(0) = 0$).

1.3.4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathcal{F}(\partial_1^m \varphi)(\xi) = i^m \xi_1^m \widehat{\varphi}(\xi)$, par la formule de Liebniz nous avons alors

$$\partial^\alpha\big(\xi_1^m \widehat{\varphi}(\xi)\big) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \partial^\beta(\xi_1^m)\, \partial^{\alpha-\beta}\big(\widehat{\varphi}(\xi)\big),$$

or si $|\alpha| \leq m-1$ alors forcément $|\beta| \leq m-1$, par conséquent $\partial^\beta(\xi_1^m)\ |_{\xi=0} = 0$. remarquons par exemple $\partial^\eta(\xi_1^m)\ |_{\xi=0} = m!$ si $\eta = (m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$. il vient alors $\partial^\alpha\big(\xi_1^m \widehat{\varphi}(\xi)\big)\ |_{\xi=0} = 0$ pour $|\alpha| \leq m-1$. Enfin on a $\partial_1^m \varphi \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$.
Si $m = 0$, alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

1.3.5. Comme $x^\alpha \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $x^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique

$$\langle \widehat{x^\alpha}, \varphi \rangle = \langle x^\alpha, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Or par un calcul directe on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)\, \mathrm{d}\xi &= i^{-|\alpha|}(2\pi)^n \partial_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi)\, \mathrm{d}\xi\ |_{x=0} \\ &= i^{-|\alpha|}(2\pi)^n \varphi^{(\alpha)}(0) \\ &= (-i)^{-|\alpha|}(2\pi)^n \langle \delta^{(\alpha)}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Soient $(f, g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^2$ telle que $f = g$ dans $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc $f(x) = g(x) + h(x)$ où h est un polynôme. Supposons que $h(x) := \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$. Il vient que $\widehat{h} = \sum_\alpha c'_\alpha \delta^{(\alpha)}$. Mais $\operatorname{supp} \delta^{(\alpha)} = \{0\}$, donc $\operatorname{supp} \widehat{f-g} = \{0\}$.

1.3.6. Par définition on écrit

$$\big\langle (-\Delta)^{s_1+s_2} f, \varphi \big\rangle := \big\langle f, (-\Delta)^{s_1+s_2} \varphi \big\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Comme $(-\Delta)^{s_1}\varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, voir la Proposition 1.7, on peut écrire alors

$$\begin{aligned} \big\langle f, (-\Delta)^{s_1+s_2}\varphi \big\rangle &= \big\langle f, (-\Delta)^{s_2}((-\Delta)^{s_1}\varphi) \big\rangle \\ &= \big\langle (-\Delta)^{s_2} f, (-\Delta)^{s_1}\varphi \big\rangle \\ &= \big\langle (-\Delta)^{s_1}((-\Delta)^{s_2} f), \varphi \big\rangle = \big\langle ((-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2}) f, \varphi \big\rangle. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$(-\Delta)^{s_1+s_2} = (-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2}.$$

Pour une comparaison avec la dérivation usuelle, on remarque que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est de classe C^m alors on a $\partial^\alpha f = \partial^\beta(\partial^\eta f)$ où $\alpha = \beta + \eta$ et $|\alpha| \leq m$, c'est-à-dire

$$\partial^{\beta+\eta} = \partial^\beta \circ \partial^\eta$$

cette formule ressemble à la formule en $(-\Delta)$.

1.3.7. Cet exercice est basé sur la transformée de Fourier, un calcul directe et simple. Les détails sont laissés au lecteur.

Décomposition de Littlewood-Paley

1.4.1. Il suffit de remplacer 2^{-j} par λ dans (i) et (ii), ce qui donne : $\forall N \in \mathbb{N}$ il existe $c_1, c_2 > 0$ et $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$, telles que

(i) $|\varphi_\lambda * f(x)| \leq c_1\, \lambda^N\, \zeta_{M_1+n+2}(\varphi)\zeta_{M_1}(f)(1+|x|)^{-M_1+N}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $|\psi_\lambda * f(x)| \leq c_2\, \lambda^{-N}\, \zeta_{M_2+n+2}(\psi)\zeta_{M_2}(f)(1+|x|)^{-M_2+N}, \quad \forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n), \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

sont satisfaites $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \lambda > 0$.

1.4.2. Facile ! En effet $\partial_1 \rho \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.4.3. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.4 et le fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, +\infty[$. Pour U_j on a $\|U_j * f\|_p \leq c\, 2^{jN} \|f\|_p$ pour toute $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

1.4.4. La réponse est non, car U_j est définit sur $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ qui ne contient pas $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.4.5. Par récurrence sur M et N. Facile.

1.4.6. On prend a, b tel que $0 < 2a < b$. On choisit une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $h \geq 0$, $0 \notin \operatorname{supp} h$, paire et à support dans la couronne $a \leq |\xi| \leq b$. Nous avons $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(2^{-k}\xi) > 0$ pour $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose

$$g(\xi) := \frac{h(\xi)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(2^{-k}\xi)}\,, \qquad \xi \neq 0.$$

On obtient ainsi une fonction g comme γ avec $\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \neq 0$.

1.4.7. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe une fonction $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, réelle et paire, telle que

$$\widehat{\eta}^{(\alpha)}(0) = 0 \qquad (|\alpha| \leq N), \tag{1.29}$$

and

$$\int_0^\infty \widehat{\eta}^2(t\,\xi)\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})\,. \tag{1.30}$$

Pour obtenir une telle fonction η, on considère une fonction paire $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\operatorname{supp}\theta \subset \text{dans la boule}\, \mathbb{B}\Big(0, \tfrac{1}{N+1}\Big) \quad \text{et} \quad \widehat{\theta}(0) = 0\,. \tag{1.31}$$

Il est claire que la fonction

$$h(\xi) := \int_0^\infty \widehat{\theta}^{\,2(N+1)}(t\xi)\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, homogènè de degré 0, c'est-à-dire $h(\lambda\xi) = h(\xi)$ pour tout λ positif, h est paire, donc $h \sim c > 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $\eta := \frac{1}{\sqrt{c}}\, \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\theta}^{\,N+1})$. On pose aussi $g := \eta^2$, on alors

$$\int_0^\infty \widehat{g}(t\xi)\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4.8. Rechercher dans la bibliographie, ...