Cours : Équations aux Dérivées Partielles

Madani MOUSSAI

Ce texte est en cours de rédaction, il n'est pas encore corrigé,
prière de tenir en compte.

0.1 EDP s linéaires et non linéaires du 1^{er} ordre

0.1.1 EDP du 1^{er} ordre linéaire

Intégrales premières

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{1}$$

Admet une solution :

$$y_1 = \varphi\left(x, a_1, \cdots, a_n\right), \cdots, y_n = \varphi\left(x, a_1, \cdots, a_n\right). \tag{2}$$

Supposons qu'on puisse résoudre le système (1) par rapport à $(a_1, \cdots, a_n)$:

$$a_1 = F_1\left(x, y_1, \cdots, y_n\right), \cdots, a_n = F_n\left(x, y_1, \cdots, y_n\right). \tag{3}$$

Définition 0.1.1.1 *On appelle intégrale première du système* (1) *, toute fonction* $F(x, y_1, \cdots, y_n)$ *qui reste constante quand on remplace* $(y_1, \cdots, y_n)$ *par une autre solution du système* (1)*. On définit en général l'intégrale première par les équations* (3)*.*

Exemples :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y} \quad , \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y}. \tag{4}$$

Écrivons (4) sous la forme :

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(z-y) + \beta(x-z) + \gamma(y-z)}.$$

Choisissons α, β et γ de façon que :

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-z} = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{0}.$$

$$\alpha = x, \beta = y, \gamma = z.$$

Donc, le numérateur doit être nul ; i.e : $xdx + ydy + zdz = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a$. Posons $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on a $dx + dy + dz = 0$, et par conséquent $x + y + z = b$. Enfin, les intégrales premières de (4) sont : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ x + y + z = b \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = -y \quad , \frac{dy}{dt} = x. \tag{5}$$

Nous avons $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dt}{1} = \dfrac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{0}$.

Prenons $\alpha = x\,, \beta = y\,, \gamma = 0$ donc, $xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a$ une est $1^{\text{ère}}$ intégrale première. Prenons $\alpha = y\,, \beta = x\,, \gamma = 0$, on a

$$-y\frac{dx}{y^2} = x\frac{dy}{x^2} = \frac{dt}{1} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

d'où $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = t + b$ est le 2^{ieme} intégrale première.

Question : Sous quelle condition, une fonction $g(s, y_1, \cdots, y_n) = C^{te}$ représente une intégrale première de (1) ?

Par dérivation par rapport à x, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_j} = 0$, d'après (1), $\dfrac{dy_j}{dx} = f_j$, donc, on a la remarque suivante :

Remarque 0.1.1.1 *L'équation*

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial g}{\partial y_j}=0 \tag{6}$$

admet un système caractéristique (1)*, dont* g *est une intégrale première, avec* $\dfrac{dy_j}{\partial x}=f_j$.

EDPs linéaires du 1^{er} ordre

Définition 0.1.1.2 *On appelle EDP linéaire du première ordre , toute équation du type*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}+g(x_1,\cdots,x_n,u)=0 \tag{7}$$

f_j *et* g *sont des fonctions à* $(n+1)$ *variables,* u *est à* n *variables.*

D'après (6), il faut que (7) admet comme système caractéristique :

$$\frac{dx_1}{du}=\frac{f_1}{g},\cdots,\frac{dx_n}{du}=\frac{f_n}{g}$$

i.e $\dfrac{dx_1}{f_1}=\dfrac{dx_2}{f_2}=\cdots=\dfrac{dx_n}{f_n}=\dfrac{du}{g}$.
En effet, il suffit d'écrire $F(x_1,\cdots,x_n,u)=0$, puis en remplaçant

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j} \qquad ,j=1,\cdots,n$$

dans (7), on a : $g\dfrac{\partial F}{\partial u}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial F}{\partial x_j}=0$.

Remarque 0.1.1.2 *Comme le système caractéristique* (1) *admet* n *intégrales premières* $F_1,F_2,\cdots,F_n$*, alors la solution de l'EDP* (7) *s'écrit sous la forme :*

$$u=\varphi\left(F_1,F_2,\cdots,F_n\right).$$

Remarque 0.1.1.3 *Si* $g=0$ *dans* (7) *, le système caractéristique est :*

$$\frac{dx_1}{f_1}=\frac{dx_2}{f_2}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n}\ ,\ du=0.$$

Nous avons alors, $n-1$ *intégrales premières* $F_1,F_2,\cdots,F_{n-1}$*, et la solution de l'EDP s'écrit :*

$$u=\varphi\left(F_1,F_2,\cdots,F_{n-1}\right).$$

Exemples

1.
$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{8}$$

S.C $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$ ou $xdx+ydy=0$
intégrale première : $x^2+y^2=C$, donc la solution de (8) est :

$$z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$$

2.
$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = mu \quad , \ m = C^{te} \tag{9}$$

S.C pour $m \neq 0$ est $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2} = \cdots = \dfrac{dx_n}{x_n} = \dfrac{du}{mu}$.

Intégrales premières : $\dfrac{x_2}{x_1}, \dfrac{x_3}{x_1}, \cdots, \dfrac{x_n}{x_1}, \dfrac{u}{x_1^m}$.

La solution de (9) est : $u = x_1^m \varphi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \cdots, \dfrac{x_m}{x_1}\right)$.

Pour $m = 0$, on a $u = \varphi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \cdots, \dfrac{x_n}{x_1}\right)$.

Facteur intégrant(Exemple d'EDP)

Soit la forme différentielle : $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Cherchons $\omega(x,y)$, tel que $\dfrac{\partial(\omega P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\omega Q)}{\partial x}$, c-à-d

$$Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y} = \omega\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Il suffir d'écrire son système caractéristique :$\dfrac{dx}{Q} = -\dfrac{dy}{P} = \dfrac{d\omega}{\omega\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}$.

Exemple :

$$xdy - ydx \tag{11}$$

Comme dans (10) , on a $x\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + y\dfrac{\partial \omega}{\partial y} + 2\omega = 0$.

S.C $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{d\omega}{-2\omega}$.

Intégrales premières $\dfrac{y}{x} = a \quad , x^2\omega = b$.

D'où $\omega = \dfrac{1}{x^2}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est le facteur intégrant de (11).

Problème de Cauchy

Étudions le cas $n = 3$. Soit l'EDP

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R, \tag{12}$$

où P, Q et R sont trois fonctions en(x,y,z). Le système caractéristique de (12) est :
$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$, si $R \neq 0$
ou , $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q}$ et $dz = 0$, si $R = 0$. On obtient alors, deux intégrales premières :$F_1(x,y,z) = C_1$, $F_2(x,y,z) = C_2$. Étudier le problème de Cauchy (12), c'est à dire, qu'il s'agit de trouver les surfaces qui passent par une courbe Γ donnée.

Exemple :

Soit$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ x^2 + (y-a)^2 = R^2 \quad , z = my. \end{cases}$

S.C $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x} \quad , dz = 0 \quad$ i.e $x^2 + y^2 = C_1 \quad , z = C_2$

Ce qui donne $C_1^2 + a^2 - R^2 = 2ay \quad , C_2 = my$.
i.e $C_1^2 + a^2 - R^2 = \dfrac{2a}{m} C_2$.
Les surfaces solutions sont : $x^2 + y^2 + a^2 - R^2 = \dfrac{2a}{m} z$.

0.1.2 EDP non linéires du 1^{er} ordre :

Définition 0.1.2.1 *On appelle EDP non linéaire du première ordre, toute relation de la forme* $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. *On se limitera au cas* $n = 2$. *En posant* $z(x, y) = u(x, y)$, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ *et* $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *, il vient que* z *est solution de :*

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{13}$$

Intégrale complète (méthode géométrique)

Définition 0.1.2.2 *On appelle intégrale complète de* (13) *, une famille de solutions définie par :*

$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \tag{14}$$

où λ, μ *sont deux paramètres indépendantes.*

Remarque 0.1.2.1 *On peut obtenir une relation qui ne contient pas* λ *et* μ. *En effet, dérivons* (14) *par rapport à* x *et* y *, on a :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad , \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{15}$$

donc, (14) *et* (15) *donnent cette relation.*

Méthode de Lagrange-Clairaut

Théorème 0.1.2.1 (Lagrange) *L'équation* (13) *admet comme système caractéristique :*

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = \frac{-dp}{F'_x + pF'_z} = \frac{-dq}{F'_y + qF'_z}. \tag{16}$$

Preuve
Supposons que p et q dépendent de x, y et z, i.e.

$$(x, y, z) \longrightarrow p(x, y, z(x, y)) \quad , (x, y, z) \longrightarrow q(x, y, z(x, y))$$

Donc, $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial z} q \quad , \quad \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{\partial q}{\partial x} + p \dfrac{\partial q}{\partial z}$.
Supposons, en plus, $\dfrac{dP}{dy} = \dfrac{dQ}{dx}$, $\quad \left(i.e. \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)$. On obtient alors ;

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{17}$$

Considérons une seconde équation (associée à (13))

$$G(x, y, z, p, q) = \lambda. \tag{18}$$

Par dérivation de (13) et (18), on a

$$\begin{cases} F'_x + \frac{\partial p}{\partial x}F'_p + \frac{\partial q}{\partial x}F'_q = 0 & (a) \quad -G'_p \\ F'_y + \frac{\partial p}{\partial y}F'_p + \frac{\partial p}{\partial y}F'_q = 0 & (b) \quad G'_q \\ F'_z + \frac{\partial p}{\partial z}F'_p + \frac{\partial p}{\partial z}F'_z = 0 & (c) \quad G'_q \end{cases}$$

$$\begin{cases} G'_x + \frac{\partial p}{\partial x}G'_p + \frac{\partial q}{\partial x}G'_q = 0 & (d) \quad F'_p \\ G'_y + \frac{\partial p}{\partial y}G'_p + \frac{\partial q}{\partial y}G'_q = 0 & (e) \quad -F'_q \\ G'_z + \frac{\partial p}{\partial z}G'_p + \frac{\partial q}{\partial z}G'_q = 0 & (f) \quad -F'_q \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b)+(e): & \left(F'_pG'_q - F'_qG'p\right)\frac{\partial p}{\partial y} = F'_qG'_y - F'_yG'_q & (g) \\ (a)+(d): & \left(F'_pG'_q - F'_qG'_p\right)\frac{\partial q}{\partial x} = F'_xG'_p - F'_pG'_x & (h) \\ (c)+(f): & \left(F'_pG'_q - F'_qG'_p\right)\frac{\partial p}{\partial z} = F'_qG'_z - F'_zG'_q & (i) \\ (a)+(e): & \left(F'_pG'_q - F'_qG'_p\right)\frac{\partial q}{\partial z} = F'_zG'_p - F'_pG'_z & (j) \end{cases}$$

Or $F'_pG'_q - F'_qG'_p = \begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ G'_p & G'_q \end{vmatrix} \neq 0$ car c'est le Jacobien de F et G, où F et G sont supposées non liées. Donc, on rapporte (g),(h), (i) et (j) dans (17), on obtient l'EDP :

$$F'_pG'_x + F'_qG'_y + \left(pF'_p + qF'_q\right)G'_z - \left(F'_x + pF'_z\right)G'_p - \left(F'_q + qF'_z\right)G'_q = 0,$$

où (16) représente son système caractéristique. Cqfd.

Exemple

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad , \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{19}$$

Écrire (19) sous la forme de (13), i.e. $p^2 + q^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$.

S.C $\dfrac{dx}{2p} = \dfrac{dy}{2q} = \dfrac{dz}{a^2} = -\dfrac{dp}{0} = -\dfrac{dq}{0}$.

On trouve (les intégrales premières)

$$p = C_1 \quad , \quad q = C_2 \quad , \quad \frac{x}{p} - \frac{y}{q} = C_3 \quad , \quad \frac{x}{2p} - \frac{z}{a^2} = C_4.$$

Comme dans (18), choisissons une autre équation :

$$x - \frac{2}{a^2}pz = \lambda \cdots\cdots (a)$$

$$(a) \Leftrightarrow x - \frac{2}{a^2}z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \lambda.$$

Par intégration par rapport à x, on a :

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{2}(x-\lambda)^2 = g(y) \cdots\cdots (b)$$

Ce qui donne , en dérivant (b) :

$$\frac{2}{a^2}qz = g'(y) \cdots\cdots (c)$$

Or (a) implique $\dfrac{4p^2z^2}{a^4} = (x-\lambda)^2 \cdots\cdots (d)$

$$(d) + (c)^2 : \qquad 2\frac{z^2}{a^2} = \left(g'(y)\right)^2 + (x-\lambda)^2 \cdots\cdots (e)$$

$$(e)+(b): \qquad 2g(y)=\left(g'(y)\right)^2 \qquad \text{i.e} \quad g(y)=\frac{1}{2}\left(y-\mu\right)^2 \quad ,\mu\in\mathbb{R}.$$

D'où la solution de (19) est (intégrale complète) :

$$\frac{z^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(x-\lambda\right)^2+\frac{1}{2}\left(y-\mu\right)^2 \qquad ,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

$$p=C_1 \tag{20}$$

$$q=C_2 \tag{21}$$

$$\frac{x}{q}-\frac{y}{q}=C_3 \qquad \text{i.e}\frac{y}{2q}-\frac{z}{a^2}=C_5 \tag{22}$$

$$\frac{x}{2p}-\frac{z}{a^2}=C_4 \tag{23}$$

$$(4): \quad 2p\frac{z}{a^2}=x-2pC_4=x-2C_1C_4=x-C_4' \tag{24}$$

$$2q\frac{z}{a^2}=y-2qC_5=\cdots=y-C_5' \tag{25}$$

$$\frac{z^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left\{\left(x-C_4'\right)^2+\left(y-C_5'\right)^2\right\}.$$