0.2 EDP linéaires du 2^{nd} ordre

Les EDP linéaires du 2^{nd} ordre jouent un rôle considérable en mécanique et en physique, exemples, propagations, vibrations, mouvements, potentiels.... En général, il n'est pas possible de trouver une solution exacte d'une telle équation, ce qui nous ramène à chercher des solutions particulières, que nous allons appellées solutions élémentaires, et ce problème est sur tout rencontré lorsqu'il s'agit d'un problème de Cauchy.

0.2.1 EDP à deux variables : Caractéristiques et classification

Définition 0.2.1.1 *une EDP du second ordre à deux variables sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{26}$$

où u est en fonction de (x,y) ; $(x,y) \in \Omega$.

Posons $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ $, q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ $, r = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $, t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $, s = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
Il vient que

$$\begin{aligned} dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy &= rdx + sdy \\ dq = \frac{\partial q}{\partial x}dx + \frac{\partial q}{\partial y}dy &= sdx + tdy. \end{aligned}$$

Ce qui donne trois équations du première ordre en r, s, t :

$$\begin{cases} r\,dx + s\,dy &= dp \\ s\,dx + t\,dy &= dq \\ ar + bs + ct &= -f \end{cases}$$

Le système admet une solution (pour r, s, t) sauf si leur déterminant et nul, i.e :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ a & b & c \end{vmatrix} = a\,(dy)^2 - b\,dx\,dy + c\,(dx)^2 = 0,$$

d'où la définition suivante :

Définition 0.2.1.2 *Si*

$$a\,(dy)^2 - b\,dx\,dy + c\,(dx)^2 = 0. \tag{27}$$

alors (26) n'admet pas de solution, sauf si

$$adp\,dy + c\,dq\,dx + f\,dx\,dy = 0$$

auquel le problème admet une infinité de solutions. L'équation (27) s'appelle équation canonique de (26)

L'équation (27) canonique admet deux solutions du type :

$$\frac{dx}{dy} = \varphi_1(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x,y). \tag{28}$$

Définition 0.2.1.3 *Les équations (28) représentent les courbes caractéristiques de (26), et il y a trois formes de caractéristiques :*

(a) *Réelles (ou hyperboliques) : on dit que (26) est une EDP hyperbolique sur* Ω *, si* $\forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow b^2 - 4ac \succ 0$

(b) *Imaginaires (ou elliptiques) : on dit que (26) est une EDP elliptique sur* Ω*, si* $\forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow b^2 - 4ac \prec 0$

(c) *Doubles (ou paraboliques) : on dit que(26)est une EDP parabolique sur* Ω *si :*$\forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

Exemples

(a) L'équation des cordes vibrantes (hyperbolique),

$$K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad , (K = cste).$$

L'équation canonique est $k^2 (dx)^2 - (dy)^2 = 0$, soit , $\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{K} \Rightarrow y = \frac{x}{K} + C_1 \quad , y = -\frac{x}{K} + C_2$.

(b) L'équation de Laplace (elliptique) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(c) L'équation de la chaleur (parabolique) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(d) L'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ est hyperbolique dans le plan $x \succ 0$, et elliptique dans $x \prec 0$.

(e) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. L'équation canonique : $x^2 (dy)^2 - y^2 (dx)^2 = 0$. Soit $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$ sont les deux caractéristiques. (e) est hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$.

0.2.2 Classification des EDP du 2^{nd} ordre de n variables

Définition 0.2.2.1 *Une EDP du second ordre à n variables sur un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *, est de la forme :*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad , x \in \Omega \tag{29}$$

où $a_{jk} \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{C})$ *avec* $a_{jk} = a_{kj}$.

On écrit la matrice $\mathcal{A}_{(x)} = (a_j k)$. Cette matrice $\mathcal{A}_{(x)}$ est symètrique , en effet, si $a_{jk} \neq a_{kj}$, on pose $a'_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$ et $a''_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} - a_{kj})$, et on a :

$$(29) \Leftrightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \left(a'_{jk} + a''_{jk}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + f = 0.$$

Remarque 0.2.2.1 $\mathcal{A}_{(x)}$ *est symètrique et toutes ses valeurs propres sont réelles.*

En effet, soit $\mathcal{A}v = \lambda v$, alors ; $\langle \mathcal{A}v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda|v|^2$. Or ; $\lambda|v|^2 = \langle \mathcal{A}v, v\rangle = \langle v, {}^t\mathcal{A}v\rangle = \langle v, \mathcal{A}v\rangle = \overline{\lambda}|v|^2$.

Pour $x \in \Omega$, soit λ_j la valeur propre de $\mathcal{A}_{(x)}$; on pose ν_+, ν_- et ν_0 succéssivement le nombre des valeurs propres positives , négatives et nulles.

Définition 0.2.2.2 *L'équation (29) est dite :*
– *elliptique en* x *si* $\nu_+ = n$ *ou* $\nu_- = n$.
– *hyperbolique en* x *si* $\nu_+ = n-1$ *et* $\nu_- = 1$, (*ou* $\nu_+ = 1$ *et* $\nu_- = n-1$).
– *parabolique en* x *si* $(\nu_+ = n-1\,,\, \nu_= 0\,,\, \nu_0 = 1)$ *ou* $(\nu_+ = 0\,,\, \nu_- = n-1\,,\, \nu_0 = 1)$
L'équation(29) est de telle type sur Ω , *si elle est en tout* x *de* Ω.

Éxemples

a) $\Delta u = f$, $\left(\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} , \lambda_j = 1 \succ 0$$

L'équation a) est elliptique sur $\mathbb{R}^2$.

b) L'équation de D'alembert

$$Qu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f$$

On a $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = (-\lambda - 1)^{n-1}(\lambda - 1)$

Donc, $\nu_+ = 1$, $\nu_- = n-1$, alors $Qu = f$ est hyperbolique.

c) Équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle_{n-1} u = f$ avec $\triangle_{n-1}$ est laplacien dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

On écrit $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = t$ et on a : $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\lambda_j = -1$, $(j = 0, \cdots, j = n-1)$ et $\lambda_n = 0$

Donc, l'équation de la chaleur est parabolique.

d) Équation de Tricomi : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$.

On a $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = x$

L'équation (d) est elliptique sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, hyperbolique sur $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$ et parabolique sur $\{0\} \times \mathbb{R}$.

e) Dans l'équation (26) on :

$$(26) \Leftrightarrow a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \ldots = 0$$

avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$, on obtient les résultats du paragraphe précédent.

0.2.3 Solution élémentaire (Séparation des variables)

Nous nous limiterons à des équations de la forme :

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j} + cu = f. \tag{30}$$

Et nous chercherons des solutions de la forme : $u(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$.
Voyons le cas $n = 2$.
Exemple :(Remarque)

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} + d\,\frac{\partial u}{\partial y} + eu = 0$$

tels que a, b, c, d et e de $\mathbb{R}$. Posons $u(x, y) = f(x)g(y)$, alors
$a\,f''g + b\,fg'' + c\,f'g + d\,fg' + e = 0$ d'où $a\,\dfrac{f''}{f} + b\,\dfrac{g''}{g} + c\,\dfrac{f'}{f} + d\,\dfrac{g'}{g} + e = 0$
On a $a\,\dfrac{f''}{f} + c\,\dfrac{f'}{f}$ et $b\,\dfrac{g''}{g} + d\,\dfrac{g'}{g}$ ne dépend que de x ou de y, alors on a forcément :

$$\begin{cases} a\,f'' + c\,f' = \lambda f \quad , \ (\lambda \in \mathbb{R}) \\ b\,g'' + d\,g' + (c - \lambda)g = 0. \end{cases}$$

Finalement f et g sont les solutions de deux équations différentielles ordinaires d'ordre 2.

0.2.4 Les différents types de problèmes aux limites

Chercher une solution d'une telle EDP est souvent difficile et encore plus compliquée lorsqu'on associé à cette EDP une condition.

a) Problème de Cauchy (ou conditions initiales) On le pose à l'instant $t = 0$ pour les EDP paraboliques ou hyperbolique

$$\begin{cases} \text{Eq parabolique} \left(\text{exemple } \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = f\right) \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Eq hyperbolique } \left(\text{exemple } \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u = f\right) \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad , \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

b) Conditions aux bord On le pose pour les EDP elliptiques , i.e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $\partial\Omega = \Gamma$ le bord

$$\begin{cases} \text{Eq elliptique } (\text{exemple } \triangle u = f) \\ u|_\Gamma \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma \end{cases}$$

Rappelons ici, la **Formule de Green** :

$$\int v \triangle u = -\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k)\, \mathrm{d}\Gamma$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k)$.

c) Problème mixte : On le pose pour les EDP paraboliques et hyperboliques, avec les conditions initiales et aux bord.