0.3 Quelques applications

Nous allons étudier dans ce chapitre quelques exemples des EDP du second ordre linéaires, en l'occurrence l'équation des ondes, de la chaleur et de Laplace.

0.3.1 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$, solution élémentaire

Considérons l'équation hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{31}$$

Elle représente les vibrations d'une corde tendue.

a) Cherchons une solution élémentaire ; on pose $u(t,x) = f(x)g(t)$ et on remplace dans (31) , alors $\frac{f''}{f}(x) = \frac{g''}{g}(t)$,
comme $\frac{f''}{f}$ $\left(\text{resp. } \frac{g''}{g}\right)$ dépend de x (resp. de t), il y a donc qu'une seule possibilité :

$$\frac{f''}{f}(x) = \frac{g''}{g}(t) = k \quad (k \in \mathbb{R}). \tag{32}$$

Ce qui donne que f et g sont solutions des équations différentielles ordinaires :

$$f'' - kf = 0, \qquad g'' - kg = 0. \tag{33}$$

b) Soit le problème mixte pour (31) :
On considère alors l'équation (31) pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,l]$, avec le problème de Cauchy : conditions initiales

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= \psi(x), \quad x \in [0,l] \end{aligned}$$

conditions aux bord $u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$

Théorème 0.3.1.1 *Les conditions aux bord impliquent que* $k \prec o$ *,(i.e* $k = -\theta^2$*).*

Preuve
Nous avons $f(0) = f(l) = 0$ (C.L). Soit x_0 la plus petite des valeurs de x, telle que $f(x_0) = 0$, alors ; si $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0, x_0]$ on a

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 & ; x \in [0, \alpha] \\ f'x) \prec 0 & ; x \in [\alpha, x_0] \end{cases}$$

donc f' n'est pas strictement croissante sur $[0, x_0]$, or d'après (32) , on a $\frac{f''}{f}(x)$ est de signe constant, donc

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f' \text{ n'est pas croissante} \\ \text{signe}\left(\frac{f''}{f}(x)\right) = c^{te} \end{cases} \Rightarrow f''(x) \leq 0 \quad \text{i.e. } \frac{f''}{f}(x) \leq 0.$$

De même ; si $f(x) \leq 0$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \leq 0 \\ f' \text{n'est pas décroissante} \\ \frac{f''}{f}(x) \ \text{ est de signe constant} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \text{, i.e. } \frac{f''}{f}(x) \leq 0.$$

De (33) , il résulte que :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = A\cos\theta x + B\sin\theta x \\ g(t) = C\cos\theta t + D\sin\theta t. \end{array}\right. \tag{34}$$

Comme $f(0) = f(l) = 0$ c- à- d $A = 0$ et $\sin\theta l = 0$ i.e. $\theta_k = \dfrac{k\pi}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$.

0.3.2 Équations des ondes dans $\mathbb{R}^2$, méthode de Fourier

Choisissons $B = 1$ dans (34) , la solution élémentaire de (31) , s'écrit alors :

$$u_k(t,x) = \left(C_k \cos\frac{k\pi}{l}t + D_k \sin\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

et on peut représenter la solution comme :

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t,x). \tag{35}$$

Alors (35) est une série de Fourier par rapport à x , ($2l$ pèriodique) et par rapport à t ($2l$ périodique). Utilisons maintenant les conditions initiales : on a

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi}{l}x \\ \psi(x) = \displaystyle\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{\infty} kD_k \sin\frac{k\pi}{l}x. \end{array}\right. \tag{36}$$

Il est claire que (36) est le développement en série de Fourier de Φ et Ψ définies par :

$$\Phi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \varphi(x) & x \in [0,l] \\ -\varphi(x) & ,\ x \in [-l,0] \end{array}\right.$$

$$\Psi(x) = \left\{\begin{array}{ll} \psi(x) & ,\ x \in [0,\ l] \\ -\psi(-x) & ,\ x \in [-l,0] \end{array}\right.$$

avec C_k , $\dfrac{k}{l}$ et D_k sont les coefficients de Fourier , i.e. :

$$\begin{array}{l} C_k = \displaystyle\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\phi}{l}x\,\mathrm{d}x \\ D_k = \displaystyle\frac{2}{k\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x. \end{array} \tag{37}$$

0.3.3 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$, unicité de la solution

Etant donnée l'équation (31) sur $\mathbb{R}^+ \times [0,l]$ muni du problème mixte (voir ; paragraphe 1 , b).
On multiplie (31) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur $[0,l]$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Intégrons le second membre de (38) par partie :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l. \tag{39}$$

Supposons maintenant que (31) admet deux solutions u_1 et u_2 , donc $v = u_1 - u_2$ est encore solution de (31) , telle que : $v(0,x) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0$, $v(t,0) = v(t,l) = 0$ ce qui entraine $\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,l) = 0$, il vient donc , que (39) pour v s'écrit $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$
Ce qui implique que $\displaystyle\int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x = C_0$, or pour $t = 0$, on a $\left(v(0,x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,x) = 0\right)$ donc $C_0 = 0$.
Par conséquent , $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,l]$, on a $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, d'où $v(t,x) = 0$.
On regroupe les formules de (31) à (37) , et on a alors :

Théorème 0.3.3.1 *Le problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad t \geq 0 \quad , x \in [0,l] \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad , \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \\ u(t,0) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique, sous la forme :

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k \cos\frac{k\pi}{l}t + D_k \sin\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$\textit{où} \quad , C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \qquad , \quad D_l = \frac{2}{k\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x.$$

0.3.4 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$, solution de Fourier

Soit le système (eq + pb limites)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0 \quad , t \geq 0 \ (x,y) \in [0,l] \times [0,l] \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y) \quad , \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = \psi(x,y) \\ u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l) = 0 \quad , t \geq 0 \end{cases} \tag{40}$$

et cherchons une solution " élémentaire" du type $u(t,x,y) = f(x,y)\, g(t)$. Alors, en remplaçant dans (40) , et multipliant par $\dfrac{1}{fg}$, on trouve :

$$\frac{1}{f}\left(f''_{x^2} + f''_{y^2}\right) = \frac{g''}{g}. \tag{41}$$

Comme dans (32) , l'équation (41) est égale à une constante $k \prec 0, \left(k = -\theta^2\right)$, d'où on a

$$\begin{cases} g'' + \theta^2 g = 0 \\ f''_{x^2} + f''_{y^2} + \theta^2 f = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne $g(t) = A\cos\theta t + B\sin\theta t$.
Pour l'équation en f , cherchons une solution de la forme $f(x,y) = \xi(x)\eta(y)$
donc $\eta\xi'' + \xi\eta'' + \theta^2\eta\xi = 0$, ou $\dfrac{\xi''}{\xi}(x) = -\dfrac{\eta''}{\eta}(y) - \theta^2$
Là aussi on a $\dfrac{\xi''}{\xi} = -\beta^2$ et $\dfrac{\eta''}{\eta} + \theta^2 = \beta^2$
D'où $\xi(x) = C\,\cos\beta x + D\,\sin\beta x$ et $\eta(y) = E\,\cos\sqrt{\theta^2-\beta^2}y + F\,\sin\sqrt{\theta^2-\beta^2}y$ avec $(\theta \succ \beta \succ 0)$
Voyons maintenant les conditions aux bord :
$x = 0 \Rightarrow C = 0$
$x = l \Rightarrow \beta = \dfrac{k\pi}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$ et D est quelconque
$y = 0 \Rightarrow E = 0$
$y = l \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{k^2+k'^2}$, $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$,et F quelconque.
Ce qui donne(choisissons $D = F = 1$) comme solution sous forme d'une série de Fourier :

$$u(t,x,y) = \sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}\left\{A_{k,k'}\ \cos\left(\sqrt{k^2+k'^2}\ \frac{\pi}{l}\,t\right) + B_{k,k'}\ \sin\left(\sqrt{k^2+k'^2}\,\frac{\pi}{l}\,t\right)\right\}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\frac{k\pi}{l}y$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \sum_{k,k'} A_{k,k'}\ \sin\frac{k\pi}{l}\,x\ \sin\frac{k\pi}{l}\,y \\ \psi(x,y) &= \frac{\pi}{l}\sum_{k,k'} B_{k,k'}\sqrt{k^2+k'^2}\ \sin\frac{k\pi}{l}\,x\ \sin\frac{k\pi}{l}\,y \end{aligned} .$$

Remarque 0.3.4.1 *La solution est unique (voir P3°).*

Théorème 0.3.4.1 *L'équation des ondes muni d'une condition initiale et une condition au limite admet une solution unique, qui peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier.*

0.3.5 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^2$

Soit le problème mixte (parabolique)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,l] \\ \varphi(x) = u(0,x) \\ u(t,0) = a \quad , u(t,l) = b \quad , (a,b) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{42}$$

Cherchons une solution élémentaire de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$.
Alors, on a $\dfrac{g''}{g}(t) = \dfrac{f''}{f}(x)$, comme dans le paragraphe 1 , on obtient : $\dfrac{g'}{g}(t) = -k^2$, $\dfrac{f''}{f}(x) = -k^2$
d'où :

$$g(t) = Ae^{-k^2 t} \quad \text{et} \quad f(x) = B\,\cos kx + C\,\sin kx.$$

Introduisons les conditions initiales :

Remarque 0.3.5.1 $v(t,x) = u + \frac{a-b}{l}x - a$ *est une solution de (42) avec* $v(t,0) = v(t,l) = 0$.

Nous avons alors, $v(t,x) = Ae^{-k^2t}(B\,\cos kx + C\,\sin kx)$
$v(t,0) = v(t,l) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad , \ K = \frac{\pi n}{l} \quad n \in \mathbb{N}$
ce qui donne $v(t,x) = \sum\limits_{n\geq 0} C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}t}\,\sin\frac{n\pi}{l}x$, or pour $t=0$
on a $v(0,x) = \varphi(x) + \frac{a-b}{l} \times -a$,donc :

$$u(t,x) = \frac{b-a}{l} \times a + \sum_n C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}\,\sin\frac{\pi n}{l}x$$

et $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\varphi(s) + \frac{a-b}{l}s - a\right)\sin\frac{n\pi}{l}s\mathrm{d}s.$

0.3.6 Unicité de la solution de l'équation de la chaleur

Multiplions (42) par u et intégrons par rapport à x :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x = \int_0^l u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \left[u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

Supposons que $a = b = 0$, la fonction $\quad t \longrightarrow \int_0^l u^2\,\mathrm{d}x \quad$ est positive et décroissante.
Supposons maintenant que (42) admet deux solutions u_1 et u_2 , alors
$v = u_1 - u_2$ est encore solution avec $v(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = 0$.
Écrivons (42) pour v , alors on a aussi ; $t \longmapsto \int_0^l v^2(t,x)\mathrm{d}x$ est positive te décroissante , or $v(0,x) = 0 \Rightarrow v \equiv 0$.

0.3.7 Équation de Laplace dans $\mathbb{R}^3$, solution élémentaire

On associe à l'opérateur de Laplace l'équation aux dérivées partielles
(dite équation de Laplace) :

$$\triangle u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = 0. \tag{43}$$

toute solution de (43) est appelée une fonction harmonique.
Passons aux coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta\,\sin\varphi \\ y = r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ z = r\,\sin\varphi. \end{cases}$$

Le Laplacien a pour expression en coordonnées sphérique :

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

L'équation (43) serait donc $\triangle u = 0$. Cherchons une solution de la forme $u = f(r)G(\theta,\varphi)$:

$$\frac{1}{f}\left(r^2 f'\right)' = \frac{1}{G}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}\right\}. \qquad (44)$$

Comme le terme à droite dépend de θ et φ, et le terme à gauche dépend de r, donc (44) égale à une constante λ ; par conséquent on a :

$$r^2 f'' + 2rf' - \lambda f = 0. \qquad (45)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} - \lambda G = 0. \qquad (46)$$

(45) est l'équation d'Euler ; il suffit de poser $f(r) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n$, ce qui nous ramène à

$$f(r) = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2}$$

avec α_1 et α_2 sont les racines de l'équation $\alpha(\alpha+1) = \lambda$ (ils sont lies par les relations $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ et $\alpha_1\alpha_2 = \lambda$), ce qui permet de changer l'écriture :

$$f(r) = Ar^{\alpha} + \frac{B}{r^{1+\alpha}}$$

Revenons à (46) :
Posons $\xi = \cos\theta$ et cherchons $G = g(\xi)h(\varphi)$, alors :

$$h(\varphi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)g'(\xi)\right] + \frac{1}{1-\xi^2}g(\xi)h''(\varphi) + \alpha(\alpha+1)g(\xi)h(\varphi) = 0$$

On suppose que h est 2π-périodique , donc $\dfrac{h''}{h} = -m^2$, $(m \in \mathbb{N})$
i.e $h'' + m^2 h = 0$, d'où

$$h(\varphi) = C\,\cos m\varphi + D\,\sin m\varphi. \qquad (47)$$

Passons à g ; elle est solution de l'équation :

$$\left(1-\xi^2\right)g'' - 2\xi\,g' + \left[\alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]g = 0. \qquad (48)$$

0.3.8 Polynômes de Legendre

(Le cas $m = 0$, $\alpha = k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow h(\varphi) = C = C^{te}$
(48) s'écrit $(1-\xi^2)\,g'' - 2\xi\,g' + k(k+1)g = 0$, c'est l'équation dont les solutions sont les polynômes de Legendre définies par :

$$P_k(\xi) = \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\xi^2-1\right)^k. \qquad (49)$$

Il résulte donc, d'après (47) et (49) , le résultat suivant :

Théorème 0.3.8.1 *L'équation de Laplace admet une solution sous la forme :*

$$u(x,y,z) = \left(Ar^k + \frac{B}{r^{k+1}}\right)P_k(\cos\theta)$$

où $x = r\,\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\,\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\,\sin\varphi$, *et* $P_k(\xi)$ *sont les polynômes de Legendre*

$$P_k(\xi) = \frac{1}{k!\,2^k}\frac{d^k}{d\xi^k}\left(\xi^2-1\right)^k.$$

0.3.9 Dérivation des conditions aux limites

Il s'agit de résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites, c-à-d ,cherchons u (harmonique) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, muni des conditions aux bord ;

$$\begin{cases} \triangle u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases} \tag{50}$$

Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions de (50), alors $v = u_1 - u_2$ est une solution du problème :

$$\begin{cases} \triangle v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Alors, $\displaystyle\int_\Omega v \cdot \triangle v = \int_\Omega u \times 0 = 0$, d'autre part, par la formule de Green on a

$$\int_\Omega v \cdot \triangle v = -\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}\, \mathrm{d}\sigma. \tag{51}$$

Comme $v|_{\partial\Omega} = 0$, donc le troisième terme de (51) est nul, on obtient alors :

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = 0 \Rightarrow \nabla v = 0 \Rightarrow v \equiv c^{te},$$

or $v|_{\partial\Omega} = 0$ ce qui donne $v \equiv 0$.