0.4 Solutions élémentaires - Applications aux EDP

0.4.1 Préléminaire

$$P\left(x,D\right)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_{\alpha}(x)D^{\alpha}$$

Trouver $u\in\mathscr{D}'\left(\Omega\right)$ telle que $P\left(x,D\right)=f$ dans $\mathscr{D}'$, où f est donnée dans $\mathscr{D}'$.
Problème : Existe-t- il u vérifiant $Pu=f$? ensuite voir l'unicité, la régularité,...etc.
Exemples :

1. $P(D)$ à coefficients constants et $u(x)=e^{ix\xi}$

$$\left(P(D)u\right)(x)=P(\xi)e^{ix\xi}.$$

Si $P(\xi)=0$, alors u est une solution de l'équation $P(D)u=0$, par conséquent $P(D)u=0$ admet une infinité de solutions.
En effet, $\xi_1\neq\xi_2$ et $P(\xi_1)=P(\xi_2)=0$, alors on peut écrire : $u(x)=\lambda e^{ix\xi_1}+\mu e^{ix\xi_2}+\cdots$ etc.

2.
$$P\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\left(x\,\frac{\partial}{\partial y}-y\,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0.$$

Posons $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, alors :

$$P\left(x,y\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=P\left(r,\theta,\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u=\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$$

$w(x,y)=v(r,\theta)$ donc ; $\dfrac{\partial v}{\partial\theta}=0$, $v=f(r)$ d'où $u(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ avec $f\in C^1\mathbb{R}$ ...etc.

3. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0$ Eq des ondes.
Faisons le changement de variables $s=x+y$, $t=x-y$,
et $u(x,y)=v(s,t)$ il vient alors $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}=0$
c-à-d $v(s,t)=f(s)+g(t)$,où $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ de classe C^2
i.e $u(x,y)=f(x+y)+g(x-y)$.

0.4.2 Existence pour les opérateurs à coefficients constants

Toujours, soit l'équation $Pu=f$,(f donnée).
Supposons qu'il existe $E\in\mathscr{D}'$, telle que $PE=\delta$. (E est appellée solution élémentaire).
Si $f\in\mathscr{D}\left(\Omega\right)$, Ω un ouvert borné, soit$\tilde{f}\in\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ telle que $\tilde{f}|_{\Omega}=f$
il suffit d'écrire $u=\left(E*\tilde{f}\right)|_{\Omega}$.

Remarque 0.4.2.1 *Si $f\in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$,$1\leq p\prec\infty$, il suffit d'écrire $gf=f$ où $g\in\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}^n$, telle que $g=1$ sur Ω , et on écrit $u=E*\left(g\tilde{f}\right)|_{\Omega}$.*

0.4.3 Régularité

Problème : Si $P(D)u = f$ et si $f \in C^{\infty}(\Omega)$, peut on obtenir $u \in C^{\infty}(\Omega)$?
En général, la répense et négative.
Exemple :

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , Pu = 0.$$

Nous avons $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$,si f ou $g \notin C^{\infty}(\mathbb{R})$,alors on a $u \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

0.4.4 Opérateurs différentiels hypo-elliptiques - elliptiques

Définition 0.4.4.1 *$P(x, D)$ est dit hypo-elliptique dans Ω, si pour tout Ω'un ouvert $\subset \Omega$, $\forall u \in \mathscr{D}'(\Omega')$, alors $Pu \in C^{\infty}(\Omega') \Rightarrow u \in C^{\infty}(\Omega')$.*

Théorème 0.4.4.1 *Il y a équivalence entre :*

1. *$P(D)$ hypo-elliptique dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *Il existe E une solution élémentaire ($PE = \delta$) telle que $E \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$.*
3. *Il existe $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ telle que $PF - \delta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 0.4.4.2 *(Opérateurs elliptiques)*

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \text{ sur } \Omega(\mathbb{R}^n).$$

*On dit que $P(D)$ est elliptique dans Ω si $P_m(x, \xi) \neq 0$, $\forall (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$
où $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$.*

Exemples :

1. $\triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = P(x, D)$ (Laplacien).

$$P_m(x, \xi) = -|\xi|^2 \neq 0 \text{ sur } \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$$

2. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ (Cauchy - Riemann)

$$P(x, \xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}\xi + \frac{i}{i}\eta\right) = \frac{1}{2i}(\xi + i\eta)$$

Théorème 0.4.4.2 *$P(D) = \sum a_{\alpha} D^{\alpha}$ (coefficients constants)
$P(D)$ elliptique $\Longrightarrow P(D)$ hypo-elliptique.*

Preuve (Admise).