il est recommandé de réfléchir avant de lire les corrections des exercices

Exercices : Équations aux Dérivées Partielles

Madani MOUSSAI

0.1 Exercices

Exercice 0.1 *Integer le système différentiel suivant (utiliser les coordonnées polaires)*

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2y}{x^2+y^2} \ , \quad \frac{dy}{dt} = -y - \frac{2x}{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Exercice 0.2 *les intégrales premières du système différentiel suivant*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z}{(z-y)^2} \ , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \tag{2}$$

Exercice 0.3 *Trouver les intégrales première du système différentiel suivant*

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}. \tag{3}$$

Exercice 0.4 *Trouver les intégrales première du système différentiel suivant*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+z}{x} \ , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z-y}{x}. \tag{4}$$

Exercice 0.5 *Trouver le facteur intégrant de la forme différentielle*

$$w := 2y^3dx + (3xy^2-1)dy. \tag{5}$$

Exercice 0.6 *Résoudre l'équation*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 4\frac{y^2}{x^2}.$$

on pourra vérifier que $z - \frac{y^2}{x^2} = C_1$ *est une intégrale première. Résoudre cette équation avec :* $x = 1$ *et* $y + z = y^2$.

Exercice 0.7 *Donner les équations canoniques et les caracteristiques de*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f. \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = f. \tag{7}$$

Exercice 0.8 *Pour* $x > 0$ *résoudre l'équation*

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

par le changement de variables $x = \frac{1}{2}(t^2+s^2)$ *et* $y = \frac{t}{s}$.

Exercice 0.9 *Résoudre l'équation*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x^2+y^2)$$

par le changement de variables en coordonnées polaires.

0.2 Quelques Solutions

Solution de l'Exercice 0.1. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec r et θ dépendent de t. (1) est équivalente à

$$r' = -r\ ,\quad \theta' r = -\frac{2}{r}.$$

Ce qui donne $r = c_1 e^{-t}$ et $\theta = -\frac{2}{r^2}t + c_2$, avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. On revenir à x et y par les formules classiques. ■

Solution de l'Exercice 0.2. Vous avons

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \quad \ldots = \frac{d(y-z)}{z-y}.$$

Il vient alors $dx = -(z-y)d(z-y)$ et $ydy - zdz = 0$. Donc les 2 intérgales premières de (2) :

$$x + \frac{1}{2}(z-y)^2 = C_1, \quad z^2 - y^2 = C_2,$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. ■

Solution de l'Exercice 0.3. On écrit

$$\frac{2xdx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \quad \ldots = \frac{2ydy}{2y^2} = \frac{2zdz}{2z^2} = \quad \ldots = \frac{(2x+2y+2z)dy}{x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 + 2z^2}.$$

On prend le 2e et le 3e terme, on a $\frac{y}{z} = C_1$, puis le 2e et le dernier terme, on a $\frac{y}{x^2+y^2+z^2} = C_2$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, et on obtient alors les intégrales premières de (3). ■

Solution de l'Exercice 0.4. Nou avons

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{z-y} = \quad \ldots = \frac{zdy}{yz+z^2} = \frac{-ydz}{y^2 - yz} = \ldots$$

$$\frac{zdy}{z^2+zy} = \frac{-ydz}{y^2-yz} = \ldots = \frac{zdy - ydz}{y^2+z^2} = \frac{(1/z)dy - (y/z^2)dz}{(y/z)^2+1}.$$

On prend le 1er et le dernier terme, on a

$$\log|x| - \arctan\left(\frac{y}{z}\right) = C_1,$$

on a aussi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{z-y} = \quad \ldots = \frac{2xdx}{2x^2} = \frac{2ydy}{2y^2+2yz} = \frac{2zdz}{-2zy+2z^2} = \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} =$$

prend le 1er et et le dernier terme, on a

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C_2,$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, et on obtient alors les intégrales premières de (4). ■

Solution de l'Exercice 0.5. On pose $P := 2y^3$ et $Q := 3xy^2 - 1$. On a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y^2\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2$$

donc w n'est pas totale. On cherche $v := v(x,y)$ telle que

$$\frac{\partial Pv}{\partial y} = \frac{\partial Qv}{\partial x}.$$

On continue, on a

$$Q\frac{\partial v}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial y} = v\Big(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big),$$

c'est à dire

$$(3xy^2 - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - 2y^3\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 v.$$

Les intégrales premières :

$$\frac{dx}{3xy^2 - 1} = \frac{dy}{-2y^3} = \frac{dv}{3y^2 v}.$$

Alors $\frac{dy}{-2y^3} = \frac{dv}{3y^2 v}$ donne $v|y|^{3/2} = C_1$. Pour l'autre intégrale première on résoud l'équation différentielle linéaire du 1er ordre (avec $X := x$ et $X' := \frac{dx}{dy}$) :

$$X' + \frac{3}{2y}X = \frac{1}{2y^3},$$

sa solution est

$$X = \frac{1}{y} + \frac{c}{|y|^{3/2}}.$$

On obtient l'intégrale première $x = \frac{1}{y} + \frac{C_2}{|y|^{3/2}}$. Maintenat le facteur intégrant est définit par $C_1 = g(C_2)$,

$$v(x,y) = \frac{1}{|y|^{3/2}}\, g(|y|^{3/2}(x - 1/y))$$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ■

Solution de l'Exercice 0.6 Comme

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{3y}$$

on a une intégrale première $x = C_2|y|^{1/3}$. N'oubions pas $z - \frac{y^2}{x^2} = C_1$ est une intégrale première. Donc la solution est $C_1 = g(C_2)$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$z = \frac{y^2}{x^2} + g(x|y|^{-1/3}).$$

Maintenant pour $x = 1$ et $y + z = y^2$ on a $g(|y|^{-1/3}) = -y$. Alors $g(t) = -t^{-3}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, ce donne

$$z = \frac{y^2}{x^2} - \frac{|y|}{x^3}, \qquad x > 0.$$

■

Solution de l'Exercice 0.7 L'équation (6) : $(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0$ est équation canonique. Les caracteristiques sont $\varphi_1 := x + y - ix$ et $\varphi_2 := x + y + ix$.
L'équation (7) : $(dy)^2 - 4dxdy - 3(dx)^2 = 0$ est équation canonique. Les caracteristiques sont $\varphi_1 := x - y$ et $\varphi_2 := 3x + y$. ■

Solution de l'Exercice 0.8 On pose $v(t, s) := u(\frac{1}{2}(t^2 + s^2), \frac{t}{s})$. Un calcule directe donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{s}\frac{\partial v}{\partial s},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = s\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{s^2}{t}\frac{\partial v}{\partial s}.$$

En remplacant dans l'équation

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

on trouve

$$2\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Donc $v(t, s) = g(s)$, par conséquent on $u(x, y) = g(2\frac{x^{1/2}}{1+y^2})$, avec $x > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ■

Solution de l'Exercice 0.9 Par le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ l'équation

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)$$

est équivalente à

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r$$

avec $v(, r\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a $v(r, \theta) = r^2 + C$. Par conséquent on a la solution $u(x, y) = x^2 + y^2 + C$. ■