I.2.3. Arrangement avec répétition:

Soit - l'ensemble fondamental (référentiel, ensemble de référence, population mère) composé de *n* éléments : $card(\Omega) = n$. Nous constituons une échantillon ω de taille *p* : $card(\omega) = p$.

Si nous avons à choisir *p* éléments parmi *n*, la disposition étant ordonnée et avec répétition, on dit qu'on a un arrangement de *p* éléments parmi *n* :

$$A_n^P = n^P$$

<u>Exemple :</u> Dans un pays imaginaire, un numéro de téléphone comporte 5 chiffres. Il doit commencer par 0, le second chiffre est compris entre 1 et 5, il indique la région. Les autres chiffres sont libres. Combien de numéros de téléphones différents peut-on former dans ce pays ?

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\omega = \{a, b, c, d, e\}$, Pour les 3 derniers chiffres, le nombre d'arrangements possible est : $A_{10}^3 = 10^3 = 1000$,

La capacité totale est : $1 \times 5 \times A_{10}^3 = 10^3 = 1 \times 5 \times 1000 = 5000$

1.2.4 Arrangement sans répétition :

Soit Ω une population mère, avec $card(\Omega) = n$. On constitue un échantillon de taille *p*, la disposition est ordonnée et sans répétition. On dit qu'on a un arrangement sans répétition de *p* éléments parmi *n* :

$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

<u>Exemple :</u> Dans notre pays imaginaire ci-dessus, combien y a-t-il de numéros comportant des chiffres tous différents ?

$$01abc \rightarrow A_3^8 = 336$$
$$02abc \rightarrow A_3^8 = 336$$
$$03abc \rightarrow A_3^8 = 336$$
$$04abc \rightarrow A_3^8 = 336$$
$$05abc \rightarrow A_3^8 = 336$$
$$\rightarrow Totale = 1680$$

par exemple dans $01abc$, les chiffres (a, b et c) ne peuvent provenir que de $\Omega - \{0,1\}$, d'où la formule de l'arrangement A_3^8.

1.2.5. Permutation sans répétition :

C'est un arrangement sans répétitions de *n* éléments parmi *n* :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

1.2.6. Permutation avec répétition :

On appelle permutation avec répétition de *p* éléments où *n* sont distincts ($n \leq p$), une disposition ordonnée de l'ensemble de ces *p* éléments où le 1er figure p_1 fois, le second p_2 fois, etc., tel que $p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = p$:

$$P_P^{(P_1,P_2,P_3,\ldots.)} = \frac{P!}{P_1!P_2!P_3!\ldots.}$$

Exemple : On jette successivement 12 dés. On appelle "'résultat"' une suite ordonnée de 12 points emmenés. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, n = 6, p = 12 éléments, ordonnés, avec répétition : $A_6^{12} = 6^{12}$

Exemple : Combien y a-t-il de résultats où chaque face est emmenée 2 fois ?

n= 6 éléments distincts, *p* = 12 éléments : $P_{12}^{(2,2,2,2,2,2)} = \frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}$

Exemple : Combien y a-t-il de résultats où la face "1" se retrouve 5 fois, "2" 3 fois, "3" 3 fois, et "4" 1 fois ?

$$P_{12}^{(5,3,3,1)} = \frac{12!}{5!3!3!1!}$$

1.2.7. Combinaison sans répétition :

On considère une population mère - constitué de *n* éléments tous discernables. On forme un échantillon de taille *p*. Si la disposition est non-ordonnée et sans répétition, on dit que l'on a une combinaison sans répétition de *p* éléments parmi *n*.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple : On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

$$C_{32}^5 = \frac{32!}{5!(32-5)!}$$

.

II. Définition de la probabilité :

II.1 Notion de probabilité

Une épreuve est une expérience dont l'issue est incertaine. Les résultats éventuels d'une épreuve font généralement appel au hasard. L'ensemble des résultats éventuels (les résultats possibles, les éventualités) s'appelle ensemble fondamental (référentiel, ensemble de référence, population mère).

Exemple : Une pièce de monnaie possède deux figures (éventualités) : pile et face. Si la pièce n'est pas trafiquée et lancée loyalement, pile a autant de chances d'apparaître que face. On dit alors que les deux éventualités sont équiprobables.

A chaque élément de l'ensemble des éventualités, on peut associer un nombre, la probabilité d'obtenir l'éventualité.

II.2 Extension de la définition :

Nous appelons évènement un sous-ensemble quelconque A_i de Ω, constitué de N_A éventualités équiprobables ç.-à-d. $A_i \subseteq \Omega$, et $card(A_i) = N_A$.

Une éventualité est un évènement élémentaire tel que la probabilité de réalisation de l'évènement A_i est $P(A_i \text{ se réalise}) = \frac{N_A}{N}$, où $card(\Omega) = N$.

Exemple 11. - est constitué d'un jeu de 32 cartes. Il comporte 8 hauteurs $\Omega = \{7, 8, 9, 10, J, D, K, A\}$. Dans chaque hauteur, il y a 4 couleurs $\{pique;\ coeur;\ carreau;\ trefle\}$.

$$P\{tirer\ la\ hauteur\ 7\} = \frac{4}{32}$$

$$P\{tirer\ la\ couleur\ pique\} = \frac{7}{32}$$

III. Axiomes du calcul des probabilités

III.1. Mesure de la probabilité :

Si nous lançons un dé à 6 faces, les résultats possibles sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, L'obtention de la face "1" constitue un évènement. La "chance"' d'avoir la face "1" est de $\frac{1}{6}$. C'est la probabilité d'avoir une face.

Soit $P(\Omega)$ l'ensemble des sous-parties de Ω. La probabilité est une application de chaque évènement des parties de Ω vers $\mathbb{R}$. Cette application noté P ou Pr s'appelle "mesure de la probabilité".

Le nombre réel $P\{E_i\}$ s'appelle probabilité de réalisation de l'évènement E_i. Elle quantifie la crédibilité de (ou la chance d'obtenir) l'évènement E_i.

III.2. Théorème des probabilités composées :

III.2.1. Les probabilités conditionnelles ou liées :

Soient 2 évènements A et B tels que $A \cap B \neq \varnothing$. La probabilité de réalisation de l'évènement B lorsque l'évènement A est réalisé s'appelle "probabilité conditionnelle de B par rapport à A", que l'on note $P\{A/B\}$. On dit également "probabilité de B si A" ou encore "probabilité de B sachant A".

On calcule cette probabilité de la manière suivante :

$$P\{A/B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

Exemple : Soit un jeu de 52 cartes. Les cartes ont été regroupées selon leur couleur. Quelle est la probabilité d'extraire la hauteur "roi" sachant que l'on a puisé dans le paquet des "cœur" ?

$P\{coeur\} = \frac{13}{52}$ et $P\{roi \cap coeur\} = \frac{1}{52}$, On calcule alors $P\{roi / coeur\} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$

IV. Probabilité de Bayes:

IV.1. Énoncé du problème :

Un ensemble de boules rouges (br) et boules noires (bn) sont réparties dans 2 urnes U_1 et U_2.

- p_1 est la proportion de br dans U_1, p_2 dans U_2 ;

- q_1 = 1 ¡ p_1 est la proportion de bn dans U_1, q_2 dans U_2 ;

On demande à un opérateur d'effectuer un tirage en deux temps :

1. d'abord, il choisit une urne, $\prod_1$ est la probabilité de choisir l'urne U_1, $\prod_2$ pour U_2 ;

2. puis il extrait une boule de l'urne.

Constatant la couleur de la boule (br pour _xer les idées), nous devons calculer la probabilité que la boule provienne de l'urne U_1 (ou U_2). Cette probabilité a posteriori est dite **Probabilité de Bayes**.

IV.2. Le théorème de Bayes :

Posons B l'évènement "tirer une boule rouge". On cherche à calculer la probabilité $P\{U_1/B\}$ tel que *:*

$$P\{U_1/B\}=\frac{P\{U_1\cap B\}}{P\{B\}}=\frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B\}}$$

Or $U_1 + U_2 = \Omega$ (ensemble fondamental) ; $B\cap(U_1 + U_2) = B\cap\Omega = B$, on en déduit :

$$\begin{aligned}P\{U_1/B\}&=\frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B.(U_1+U_2)\}}\\&=\frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B.U_1+B.U_2)\}}\end{aligned}$$

Si U_1 et U_2 sont incompatibles, $B.U_1$ et $B.U_2$ le sont également. Nous pouvons appliquer l'axiome d'additivité de Kolmogorov.

$$P\{U_1/B\} = \frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B.U_1\}+P\{B.U_2\}}$$
$$= \frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}+P\{B/U_2\}\times P\{U_2\}}$$

Exemple : Un appareil peut être monté avec des pièces de haute qualité (40% des cas) et avec des pièces ordinaires (60% des cas). Dans le premier cas, sa fiabilité (probabilité de fonctionnement) sur une durée t est égale à 0,95 ; dans le second, elle est de 0,7. L'appareil a été soumis à un essai et s'est avéré fiable (fonctionnement sans défaillance sur la durée de référence). Déterminer la probabilité que l'appareil soit composé de pièces de haute qualité.

Solution : Notons B l'évènement "l'appareil a fonctionné sans défaillance" ; U_1 (resp. U_2) la probabilité qu'un appareil soit composé de pièces de haute qualité (resp. de qualité ordinaire) :

$P(U_1) = 0,4$ et $P(U_2) = 0,6$.

On nous indique que $P(B/U_1) = 0,95$ et $P(B/U_2) = 0,7$.

En appliquant le théorème de Bayes, nous obtenons :

$$P\{U_1/B\} = \frac{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}}{P\{B/U_1\}\times P\{U_1\}+P\{B/U_2\}\times P\{U_2\}}$$
$$= \frac{0,95\times 0,4}{0,95\times 0,4+0,7\times 0,6} = \frac{0.38}{0.8} = 0.475$$

Exemple : Dans une population de jeunes, il y a 40% de fumeurs et 30% atteints par une maladie respiratoire. Parmi les fumeurs 60% sont atteints par la maladie.

Quelle est la probabilité pour que quelqu'un atteint par la maladie soit également fumeur ?

(N.B. Modélisez la résolution du problème d'au moins deux façons différentes).

Solution :

Soit F = « *Etre fumeur.* ». $P(F) = 0{,}4$.

Soit M = « *Etre malade.* ». $P(M) = 0{,}3$.

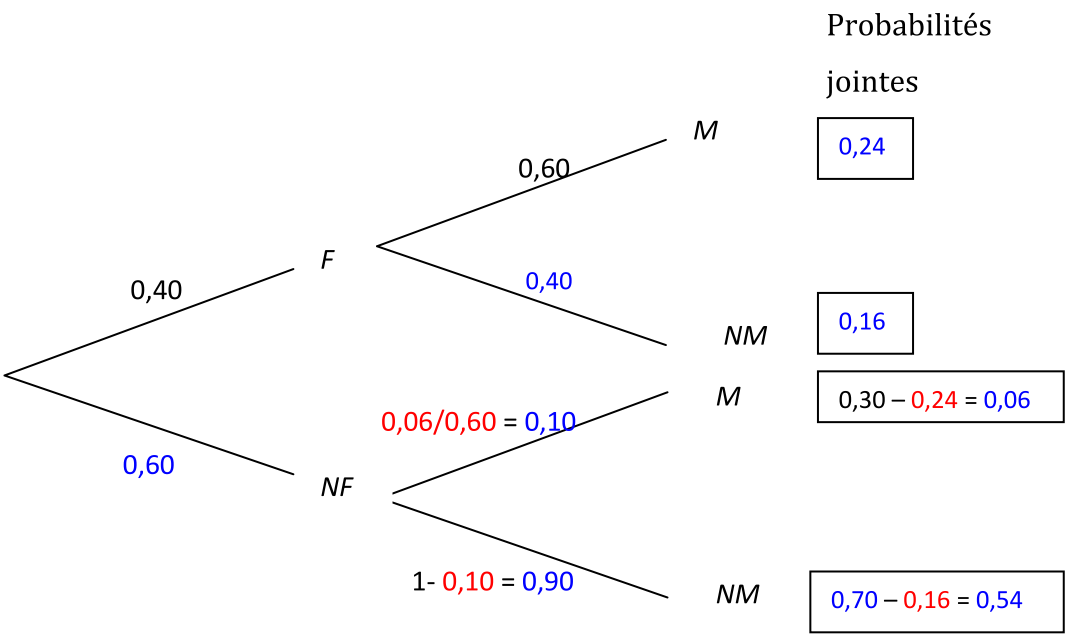
Et $P(M/F) = 0{,}6$.

Soit NF = « *Etre non fumeur.* » et NM = « *Etre en bonne santé.* ».

$$P(F/M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{P(M/F).P(F)}{P(M)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}4}{0{,}3} = 0{,}8.$$

SOLUTION PAR LE DIAGRAMME EN ARBRE

En noir, données de l'énoncé et de la théorie



$$\Rightarrow P(F/M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{P(M/F).P(F)}{P(M)} = \frac{0{,}24}{0{,}24 + 0{,}06} = 0{,}8.$$

V. Les variables aléatoires :

V.1. Définition d'une variable aléatoire :

On lance 3 fois une pièce de monnaie (qui prend deux valeurs possibles "pile" ou "face"). L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(P,F),(P,F),(P,F)\}$, Notons X le nombre de "face" apparue au bout des trois jets. Les valeurs possibles de X sont $D_X = \{0,1,2,3\}$. X est une application de Ω dans D_X .

De manière générale, X est une application :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

X s'appelle une variable aléatoire, on s'intéressera aux valeurs prises par X ($X = x$), et plus particulièrement à la probabilité d'obtenir ces valeurs $P(X = x)$.

V.2. La loi de probabilité :

Une variable aléatoire est totalement définie par sa loi de probabilité. Cette dernière est caractérisée par :

1. l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre (son domaine de définition D_X) ;
2. les probabilités attribuées à chacune de ses valeurs $P(X = x)$.

<u>Exemple :</u> On lance une pièce de monnaie une fois, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{(P,F)\}$. Soit X le nombre d'apparition de "pile", $D_X = \{0,1\}$ et on peut calculer facilement $P(X = x)$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{2}$

<u>Exemple :</u> On lance une pièce de monnaie 2 fois, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{(P,F)\}$. Soit X le nombre d'apparition de "pile", $D_X = \{0,1,2\}$.

On veut calculer $P(X = 1)$, pour cela on s'intéresse aux deux séquences possibles qui lui sont associées (Pile d'abord, Face ensuite), ou inversement (F, P).

$P(X = 1) = P\{(P,F) \text{ ou } (F,P)\} = P\{(P,F)\} + P\{(F,P)\} = P\{(P\}P\{(F\} + P\{(F\}P\{(P\}$

$P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

De la même manière, nous pouvons calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.

De manière générale, pour n jets de pièces, si l'on se réfère au schéma binomial, la probabilité d'obtenir x-fois le côté "pile" est égal à :

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

V.3. Fonction de répartition :

V.3.1. Pour une variable discrète :

La fonction de répartition n'est autre que le cumul des probabilités individuelles. La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x est une fonction $F(x)$ que l'on appelle fonction de répartition, $P(X < x) = F(x)$.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{j=0}^{x-1} P(X - x)$$

V.3.2. Pour une variable continue :

Dans ce cas, la plupart du temps, $D_X \equiv \mathbb{R}$. La probabilité ponctuelle $P(X = x) = f(x)$ est la fonction de densité. La fonction de répartition $F(x) = P(X < x)$ est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La fonction de répartition $F(x)$ est une fonction continue, monotone et croissante dans le domaine [0,1]. On note deux cas extrêmes :

$$F(-\infty) = \underline{\lim} \ \mathrm{F(x)=0}$$
$$F(+\infty) = \underline{\lim} \ \mathrm{F(x)=1}$$

On retrouve bien là les axiomes de positivité et de certitude.

La fonction de répartition est généralement représentée graphiquement par une courbe cumulative.

V.3.3. Densité d'une variable aléatoire continue :

La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue est la dérivée première par rapport à x de la fonction de répartition. Cette dérivée prend le nom de fonction de densité, notée $f(x) = dF(x)/dx$. Elle est équivalente à $P(X = x)$ dans le cas des variables discrètes.

On dit que f(x) est une fonction de densité si : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

V.3.4. Probabilité d'un intervalle :

On cherche à calculer la probabilité P(a < X < b). Graphiquement, cela se traduit par la surface comprise entre a et b

Analytiquement, il s'agit de $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx - \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(a) - F(b)$$