

2.4 Obtention d'une forme canonique à partir d'une représentation d'état quelconque

2.4.1 Première forme canonique de commandabilité

Pour obtenir la première forme canonique de commandabilité à partir d'une représentation d'état quelconque, on calcule d'abord la matrice de commandabilité M_{co} .

$$M_{co} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Si le système est commandable, on calcule l'inverse de M_{co}

$$\text{Avec } M_{co}^{-1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ q \end{bmatrix} \text{ où } q \in \mathcal{R}^{1 \times n}$$

On calcule la matrice de passage P_1 , telle que :

$$P_1 = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ ensuite on calcule } P_1^{-1}$$

$$\text{La première FCC, s'écrit : } \begin{cases} A_{c1} = P_1 A P_1^{-1} \\ B_{c1} = P_1 B \\ C_{c1} = C P_1^{-1} \\ D_{c1} = b_n \end{cases} \quad (8)$$

2.4.2 Première forme canonique d'observabilité

Pour obtenir la première forme canonique d'observabilité à partir d'une représentation d'état quelconque, on calcule d'abord la matrice d'observabilité M_{ob} .

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [\dots \tilde{q}]$$

On calcule la matrice de passage P_{o1} , telle que :

$$P_{o1} = [\tilde{q} \ A\tilde{q} \ \dots \ A^{n-1}\tilde{q}]$$

$$\text{La première FCO, s'écrit : } \begin{cases} A_{o1} = P_{o1}^{-1} A P_{o1} \\ B_{o1} = P_{o1}^{-1} B \\ C_{o1} = C P_{o1} \\ D_{o1} = b_n \end{cases} \quad (9)$$

1. Cas des systèmes MIMO

On considère le système linéaire multivariable décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (10)$$

Avec : $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur de sortie.

$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée et $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie.

1.1. Commandabilité

Selon le critère de commandabilité de Kalman le système est commandable si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité est égale à l'ordre du système.

c.à.d : $\text{rang}(M_{co}) = n$.

avec : $M_{co} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$

et comme on a : $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$

Alors la matrice de commandabilité va se réécrire sous la forme :

$$M_{co} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_m \ \dots \ A^{n-1}b_1 \ A^{n-1}b_2 \ \dots \ A^{n-1}b_m]$$

On remarque que la matrice de commandabilité n'est pas carrée, et pour que le système soit commandable, il faudra alors trouver n vecteurs linéairement indépendants.

Procédure :

- 1- On sélectionne r colonnes de B linéairement indépendantes. En général $r=m$, car la matrice B est souvent de plein rang : $b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r$
- 2- On sélectionne parmi les Ab_i , r' colonnes linéairement indépendantes. Si $r+r'=n$, on s'arrête, si non on continue.
- 3- On continue la même procédure avec les A^2b_i , c.à.d. on sélectionne r'' colonnes linéairement indépendantes jusqu'à ce que : $r+r'+r''+\dots=n$.
- 4- Après on réarrange les colonnes linéairement indépendantes comme suit :

$$b_1 \ Ab_1 \ \dots \ A^{\mu_1-1}b_1 \ b_2 \ Ab_2 \ \dots \ A^{\mu_2-1}b_2 \ \dots \ b_m \ \dots \ A^{\mu_n-1}b_m$$

μ_i : sont les indices de commandabilité des entrées i du système.

3.2. Indice de commandabilité

L'indice de commandabilité μ_i relatif à l'entrée u_i est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée u_i .

Pour vérifier si un système multivariable est commandable, on construit d'abord une matrice carrée W telle que :

$$W = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{\mu_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{\mu_2-1}b_2 \quad \dots \quad b_m \quad \dots \quad A^{\mu_n-1}b_m]$$

On calcule les indices de commandabilité μ_i ($i=1 \dots m$).

Le système est commandable si : $\sum_{i=1}^m \mu_i = n$

Exemple : Soit le système linéaire à temps invariant suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$Mco = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$W = [b_1 \quad b_2 \quad Ab_1]$ si $\text{rang}(W) = n$, on calcule les indices de commandabilité, si W n'est pas de rang n , alors on remplace la dernière colonne Ab_1 par Ab_2 .

$$W = [b_1 \quad b_2 \quad Ab_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \det(W) = -2, \text{ alors } \text{rang}(W) = 3.$$

$\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 3 = n$ donc le système est commandable.

de sortie.

3.3. Observabilité

Selon le critère de commandabilité de Kalman le système est Observable si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité est égale à l'ordre du système.

c.à.d : $\text{rang}(Mob) = n$.

$$\text{avec : } Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

et comme on a : $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

Alors la matrice d'observabilité va se réécrire sous la forme :

Mob = $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \\ c_1 A \\ c_2 A \\ \vdots \\ c_p A \\ \vdots \\ c_1 A^{n-1} \\ c_2 A^{n-1} \\ \vdots \\ c_p A^{n-1} \end{bmatrix}$ On remarque que la matrice d'observabilité n'est pas carrée, et pour que le

système soit observable, il faudra alors trouver n vecteurs linéairement indépendants.

Procédure :

- 1- On sélectionne m_0 lignes de C linéairement indépendantes. En général $m_0 = p$.
- 2- On sélectionne parmi les $c_i A$, m_1 lignes linéairement indépendantes. Si $m_0 + m_1 = n$, on s'arrête, si non on continue.
- 3- On continue la même procédure avec les $c_i A^2$, c.à.d. on sélectionne m_2 lignes linéairement indépendantes jusqu'à ce que : $m_0 + m_1 + m_2 + \dots = n$.

Si le rang n'est pas atteint au dernier bloc, alors le système n'est pas observable.

3.4. Obtention des formes canoniques de commandabilité

Pour obtenir les formes canoniques de commandabilité, il faut vérifier d'abord si le système est commandable. C.à.d., on calcule la matrice M_{co} puis la matrice W , si W est de rang plein alors le système est commandable.

3.4.1 Première forme canonique de commandabilité (FCC simple)

Pour obtenir la 1^{ère} FCC, on prend comme changement de variable P_1 , tel que :

- Partant de b_1 , on pousse la construction de la chaîne $b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1-1}b_1$, jusqu'à obtenir un vecteur linéairement dépendant des précédents c.à.d maximiser μ_1 .

- Puis, on choisit la colonne b_2 suivante si elle est linéairement indépendante des $A^i b_1$ et on recommence jusqu'à obtenir une matrice régulière P_1 .

$$P_1 = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{\mu_1-1} b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{\mu_2-1} b_2 \quad \dots \quad b_m \quad \dots \quad A^{\mu_n-1} b_m]$$

Ensuite on calcule P_1^{-1}

$$\text{La première FCC, s'écrit : } \begin{cases} A_{c1} = P_1^{-1} A P_1 \\ B_{c1} = P_1^{-1} B \\ C_{c1} = C P_1 \end{cases}$$

3.4.2 Deuxième forme canonique de commandabilité (forme de Guidorsi)

Pour obtenir la 2^{ème} FCC, on prend comme changement de variable P_2 , tel que :

- Dans un premier temps, on sélectionne les m colonnes de b_i de B si elles sont linéairement indépendantes, sinon, on ne retient que r colonnes, $r = \text{rang}(B)$.
- On sélectionne la colonne Ab_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, si elle est linéairement indépendante des colonnes $b_1, \dots, b_r, Ab_1, \dots, Ab_{i-1}$
- On sélectionne la colonne $A^2 b_i$, $i \in \{1, \dots, r\}$, si elle est linéairement indépendante des colonnes $b_1, \dots, b_r, Ab_1, \dots, A^2 b_1, \dots, A^2 b_{i-1}$
- On continue jusqu'à obtenir une sélection de n colonnes linéairement indépendantes.

Lorsque cet algorithme se termine, on obtient après réarrangement de l'ordre des colonnes, la matrice régulière suivante :

$$P_2 = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{c_1-1} b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{c_2-1} b_2 \quad \dots \quad b_r \quad \dots \quad A^{c_r-1} b_r]$$

Où les c_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ sont les indices de commandabilité, vérifiant :

$$\sum_{i=1}^r c_i = n \quad (n \text{ est l'ordre du système}).$$

Ensuite on calcule P_2^{-1}

$$\text{La deuxième FCC, s'écrit : } \begin{cases} A_{c2} = P_2^{-1} A P_2 \\ B_{c2} = P_2^{-1} B \\ C_{c2} = C P_2 \end{cases}$$

3.4.3 Troisième forme canonique de commandabilité (forme de Luenberger)

Cette forme est obtenue à partir de P_2^{-1} .

On introduit la notion d'index de commandabilité σ_i , tel que :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^i c_j$$

Et on construit la matrice régulière P_3 telle que :

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{\sigma_1} \\ P_{\sigma_1} A \\ \vdots \\ P_{\sigma_i} A^{c_1-1} \\ P_{\sigma_2} \\ P_{\sigma_2} A \\ \vdots \\ P_{\sigma_2} A^{c_2-1} \\ \vdots \\ P_{\sigma_r} \\ P_{\sigma_r} A \\ \vdots \\ P_{\sigma_r} A^{c_r-1} \end{bmatrix}, \text{ avec } P_{\sigma_i} \text{ c'est la } i\text{ème ligne de } P_2^{-1}$$

Ensuite on calcule P_3^{-1}

$$\text{La troisième FCC, s'écrit : } \begin{cases} A_{c3} = P_3 A P_3^{-1} \\ B_{c3} = P_3 B \\ C_{c3} = C P_3^{-1} \end{cases}$$

Exemple : Soit le système linéaire à temps invariant suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calculer :

- 1- La 1^{ère} FCC simple .
- 2- La deuxième FCC (forme de Guidorsi)
- 3- La troisième FCC de Luen berger

$$\text{La matrice de commandabilité : } M_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$W=[b_1 \ b_2 \ Ab_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(w)=1$ (non nul), alors $\text{rang}(W) = 3$ donc le système est commandable.

La première FCC : $P_1=[b_1 \ Ab_1 \ A^2b_1]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(P_1)= 1 \neq 0$, alors P_1 est inversible.

$$\text{Et } P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} A_{c1} = P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ B_{c1} = P_1^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La deuxième FCC : $P_2=[b_1 \ Ab_1 \ b_2]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(P_2)= -1 \neq 0$, alors P_2 est inversible.

$$\text{Et } P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} A_{c2} = P_2^{-1}AP_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{c2} = P_2^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La troisième FCC :

Les indices de commandabilité sont : $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \mu_1 = 2$, et

$$\sigma_2 = \mu_1 + \mu_2 = 3$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{\sigma_1} \\ P_{\sigma_1}A \\ P_{\sigma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{La troisième FCC, s'écrit : } \left\{ \begin{array}{l} A_{c3} = P_3AP_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{c3} = P_3B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

3.5. Obtention des formes canoniques d'observabilité

Les résultats précédents concernant les formes de commandabilité se transposent immédiatement pour donner les formes d'observabilité, soit schématiquement :

$$S(A, B, C) \rightarrow S(A^T, C^T, B^T).$$