Chapitre 3 : Commandabilité et observabilité

1. Introduction

Les concepts de commandabilité et d'observabilité sont des concepts fondamentaux pour l'étude des systèmes. Ils décrivent respectivement comment les états d'un système sont influencés par les entrées et quelles informations les sorties mesurées délivrent sur les états du système.

Ces deux concepts sont nécessaires que ce soit pour la synthèse d'une commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateurs où il faudra que le système soit observable.

Dans ce chapitre Nous allons commencer par étudier les systèmes mono variables et par la suite nous allons aborder les systèmes multivariables.

2. Cas des systèmes SISO :

On considère le système linéaire à temps invariant suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Avec : x(t)$\in \Re^n$ est le vecteur d'état, u(t) $\in \Re$ est le vecteur d'entrée et y(t)$\in \Re$ est le vecteur de sortie.

A$\in \Re^{nxn}$ est la matrice d'état, B $\in \Re^{nx1}$ est la matrice d'entrée et C $\in \Re^{1xn}$ est la matrice de sortie.

2.1. Commandabilité :

La commandabilité à pour objet de caractériser la capacité d'un système à voir ses caractéristiques dynamiques modifiées par les entrées. Il est souvent intéressant de s'assurer de la commandabilité d'un système avant de cherche a mettre en œuvre la commande proprement dite.

2.1.1. Définition :

Un système linéaire est commandable sur un intervalle $[t_0, t_1]$, s'il est possible de le conduire en lui appliquant un signal de commande **u(t)** définie sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$, d'un état initial $x(t_0)$ à un état final $x(t_1)$.

Un système est dit **complètement commandable** s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

2.1.2. Critère de commandabilité (Théorème de Kalman) :

Une condition nécessaire et suffisante de commandabilité pour un système linéaire est que le rang de sa matrice de commandabilté est égale à l'ordre du système.

$$M_{com} = [\mathrm{B}\ AB\ \ A^2B \ldots A^{n-1}B] \qquad (2)$$

avec M_{com} : matrice de commandabilité.

Rang(M_{com})= n.

Exemple 1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

La matrice de commandabilité : $M_{com} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$

det(M_{com})=2≠ 0 ⇒ rang(M_{com})=2 , alors le système est commandable.

Exemple 1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

La matrice de commandabilité : $M_{com} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x(t)$

det(M_{com})=0⇒ rang(M_{com})=1 , alors le système n'est pas commandable.

2.2.Observabilité

On dit qu'un état $x(t_0)$ est **observable**, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini [t_0 , t_1].
Le système est dit **complètement observable** si ∀ x(t_0) qui appartient à l'espace d'état, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

2.2.2.Critère d'observabilité (Théorème de Kalman) :

Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour un système linéaire est que le rang de sa matrice d'observabilité est égale à l'ordre du système.

$$M_{obs} = [\mathrm{C} \quad \mathrm{C}A \; CA^2 \ldots \mathrm{C}A^{n-1}]^{\mathrm{T}} \qquad (3)$$

avec M_{obs} : matrice d'observabilité.

Rang(M_{obs})= n.

Exemple 3 : Etudier l'observabilité des deux systèmes donnés précédemment.

Premier système : $M_{obs} = [\mathrm{C} \quad \mathrm{C}A]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

det(M_{obs})=-6$\neq$ 0 $\Rightarrow$ rang(M_{obs})=2 , alors le système est observable.

Premier système : $M_{obs} = [\mathrm{C} \quad \mathrm{C}A]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

det(M_{obs})=0$\Rightarrow$ rang(M_{obs})=1 , alors le système n'est pas observable.

Remarque :

Si la matrice A est *diagonale*, le système est complètement commandable si tous les éléments de B sont non nuls. le système est complètement observable si tous les éléments de C sont non nuls.

2.3. Formes canoniques pour les systèmes monovariables

En général, on désigne par forme canonique d'un système linéaire continu une représentation d'état dont les matrices A, B et C ont une forme très simple et par conséquent, possèdent un nombre réduit d'éléments différents de zéro dans leurs structures. Les formes canoniques les plus connues et utilisées sont : la forme compagne de commandabilié, la forme compagne d'observabilité et la forme modale.

Soit la fonction de transfert d'un système donné, si la fonction de transfert n'admet pas de pôles et zéros communs alors le système est commandable et observable.

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

En effet, si le système est commandable, on peut le mettre sous une forme d'état dite forme canonique de commandabilité.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad n \geq m \tag{4}$$

$$G(s) = \frac{V(s)Y(s)}{U(s)V(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} \tag{5}$$

Ceci conduit à la forme canonique commandable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \;\; b_1 \ldots b_m \;\; 0 \ldots \;\; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.3.2. Forme compagne d'observabilité

Si le système est observable, on peut le mettre sous une forme d'état dite forme compagne d'observabilité.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad n \geq m$$

On divise le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par s^n

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{m-n} + b_{m-1} s^{m-n-1} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$(s)[1 + a_{n-1} s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}] = [b_m s^{m-n} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$) = -[a_{n-1} s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}]Y(s) + [b_m s^{m-n} + \cdots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$.\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(b_0 U - a_0 Y)s^{-1}}_{X_{1(s)}} + b_1 U - a_1 Y)s^{-1} + \cdots)}_{X_2(s)} \ldots) + b_m U - a_m Y)s^{-1}}_{X_{m+1}(s)} - a_{m+1} Y)s^{-1} - \cdots)s^{-1}}_{X_{m+2}(s)} - a_{n-1} Y)s^{-1}}_{X_n(s)}$$

On pose : $Y(s) = X_n(s)$, alors : $y(t) = x_n(t)$

$$X_1(s) = [b_0 U(s) - a_0 Y(s)]s^{-1} = [b_0 U(s) - a_0 X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -a_0 x_n(t) + b_0 u(t)$$

$$X_2(s) = [X_1(s) + b_1 U(s) - a_1 X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_n(t) + b_1 u(t)$$

$$\ldots.$$

$$X_{m+1}(s) = [X_m(s) + b_m U(s) - a_m X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_{m+1}(t) = x_m(t) - a_m x_n(t) + b_m u(t)$$

$$X_{m+2}(s) = [X_{m+1}(s) - a_{m+1} X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_{m+2}(t) = x_{m+1}(t) - a_{m+1} x_n(t)$$

$$\ldots.$$

$$X_n(s) = [X_{n-1}(s) - a_{n-1} X_n(s)]s^{-1} \Rightarrow \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t)$$

On obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \;\; 0 \ldots 0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Le système d’équation (7) représente la forme canonique d’observabilité.

2.4 Obtention d'une forme canonique à partir d'une représentation d'état quelconque

2.4.1 Première forme canonique de commandabilité

Pour obtenir la première forme canonique de commandabilité à partir d'une représentation d'état quelconque, on calcule d'abord la matrice de commandabilité Mco.

$Mco=[\ B\ AB\ldots A^{n-1}B]$

Si le système est commandable, on calcule l'inverse de Mco

Avec $Mco^{-1}=\begin{bmatrix} \vdots \\ q \end{bmatrix}$ où $q \in \mathcal{R}^{1xn}$

On calcule la matrice de passage P_1 , telle que :

$P_1 = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$, ensuite on calcule P_1^{-1}

La première FCC, s'écrit : $\begin{cases} A_{c1} = P_1 A P_1^{-1} \\ B_{c1} = P_1 B \\ C_{c1} = C P_1^{-1} \\ D_{c1} = b_n \end{cases}$ (8)

2.4.2 Première forme canonique d'observabilité

Pour obtenir la première forme canonique d'observabilité à partir d'une représentation d'état quelconque, on calcule d'abord la matrice d'observabilité Mob.

$Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [\ldots\ldots\tilde{q}]$

On calcule la matrice de passage Po_1 , telle que :

$$P_{o1} = [\tilde{q}\ A\tilde{q} \ldots A^{n-1}\tilde{q}]$$

La première FCO, s'écrit : $\begin{cases} A_{o1} = P_{o1}^{-1} A\ P_{o1} \\ B_{o1} = {Po_1}^{-1}{}_1 B \\ C_{o1} = C\ P_{o1} \\ D_{o1} = b_n \end{cases}$ (9)

3. Cas des systèmes MIMO

On considère le système linéaire multivariable décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (10)$$

Avec : $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \Re^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \Re^p$ est le vecteur de sortie.

$A \in \Re^{nxn}$ est la matrice d'état, $B \in \Re^{nxm}$ est la matrice d'entrée et $C \in \Re^{pxn}$ est la matrice de sortie.

3.1. Commandabilité

Selon le critère de commandabilité de Kalman le système est commandable si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité est égale à l'ordre du système.

c.à.d : **rang(Mco)=n**.

avec : $Mco=[\,B\ AB \ldots A^{n-1}B]$

et comme on a : $B= [b_1\ b_2 \ldots\ldots b_m]$

Alors la matrice de commandabilité va se réécrire sous la forme :

$Mco=[\,b_1\ b_2 \ldots b_m\ Ab_1\ Ab_2 \ldots Ab_m \ldots A^{n-1}b_1\ A^{n-1}b_2 \ldots A^{n-1}b_m\,]$

On remarque que la matrice de commandabilité n'est pas carrée, et pour que le système soit commandable, il faudra alors trouver n vecteurs linéairement indépendants.

Procédure :

1- On sélectionne **r** colonnes de **B** linéairement indépendantes. En général **r=m**, car la matrice B est souvent de plein rang : $\mathbf{b_1\ b_2 \ldots b_r}$

2- On sélectionne parmi les $\mathbf{Ab_i}$, **r'** colonnes linéairement indépendantes. Si **r+r'=n**, on s'arrête, si non on continue.

3- On continue la même procédure avec les $\mathbf{A^2b_i}$**,** c.à.d. on sélectionne **r''** colonnes linéairement indépendantes jusqu'à ce que : i **r+r'+r''+…=n.**

4- Après on réarrange les colonnes linéairement indépendantes comme suit :
$b_1\ Ab_1 \ldots A^{\mu_1-1}b_1\ b_2\ Ab_2 \ldots A^{\mu_2-1}b_2 \ldots\ldots\ldots b_m \ldots A^{\mu_n-1}b_m$

μ_i : sont les indices de commandabilité des entrées i du système.

3.2. Indice de commandabilité

L'indice de commandabilité μ_i relatif à l'entrée $\mathbf{u_i}$ est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée $\mathbf{u_i}$**.**

Pour vérifier si un système multivariable est commandable, on construit d'abord une matrice carrée W telle que :

$$W=[\ b_1\ \ Ab_1 \dots A^{\mu_1-1}b_1\ b_2\ \ Ab_2 \dots A^{\mu_2-1}b_2 \dots\dots\dots b_m \dots A^{\mu_n-1}b_m\ ]$$

On calcule les indices de commandabilité μ_i (i=1….m).

Le système est commandable si : $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = n$

Exemple : Soit le système linéaire à temps invariant suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\text{Mco}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$W=[b_1\ \ b_2\ Ab_1]$ si rang(W)=n , on calcule les indices de commandabilité , si W n'est pas de rang n , alors on remplace la dernière colonne Ab_1 par Ab_2.

$$W=[b_1\ \ b_2\ Ab_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$, det (W)=-2 , alors rang(W)=3.

$\mu_1 = 2 \quad et\ \mu_2 = 1 \quad \Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 3 = n$ donc le système est commandable.

de sortie.

3.3. Observabilité

Selon le critère de commandabilité de Kalman le système est Observable si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité est égale à l'ordre du système.

c.à.d : **rang(Mob)=n**.

avec : $\text{Mob}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

et comme on a : C= $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

Alors la matrice d'observabilité va se réécrire sous la forme :

Mob= $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \\ c_1A \\ c_2A \\ \vdots \\ c_pA \\ \vdots \\ c_1A^{n-1} \\ c_2A^{n-1} \\ \vdots \\ c_pA^{n-1} \end{bmatrix}$ On remarque que la matrice d'observabilité n'est pas carrée, et pour que le système soit observable, il faudra alors trouver n vecteurs linéairement indépendants.

Procédure :

1- On sélectionne **m_0** lignes de **C** linéairement indépendantes. En général **m_0=p**.

2- On sélectionne parmi les **c_iA, m_1** lignes linéairement indépendantes. Si **m_0+ m_1=n**, on s'arrête, si non on continue.

3- On continue la même procédure avec les **$c_i A^2$,** c.à.d. on sélectionne **m_2** lignes linéairement indépendantes jusqu'à ce que : **m_0+ m_1+m_2+…=n.**

Si le rang n'est pas atteint au dernier bloc, alors le système n'est pas observable.

3.4. Obtention des formes canoniques de commandabilité

Pour obtenir les formes canoniques de commandabilité, il faut vérifier d'abord si le système est commandable. C.à.d., on calcule la matrice Mco puis la matrice W, si W est de rang plein alors le système est commandable.

3.4.1 Première forme canonique de commandabilité (FCC simple)

Pour obtenir la $1^{ére}$ FCC, on prend comme changement de variable P_1, tel que :

- Partant de b_1, on pousse la construction de la chaine b_1, Ab_1,…, $A^{\mu_1-1}b_1$, jusqu'à obtenir un vecteur linéairement dépendant des précédent c.à.d maximiser μ_1.

- Puis, on choisit la colonne b_2 suivante si elle est linéairement indépendante des $A^i b_1$ et on recommence jusqu'à obtenir une matrice régulière P1.
  P_1=[b_1 $Ab_1 \dots A^{\mu_1-1}b_1$ b_2 $Ab_2 \dots A^{\mu_2-1}b_2$ ………$b_m \dots A^{\mu_n-1}b_m$]

Ensuite on calcule P_1^{-1}

La première FCC, s'écrit : $\begin{cases} A_{c1} = P_1^{-1}AP_1 \\ B_{c1} = P_1^{-1}B \\ C_{c1} = CP_1 \end{cases}$

3.4.2 Deuxième forme canonique de commandabilité (forme de Guidorsi)

Pour obtenir la 2éme FCC, on prend comme changement de variable P_2, tel que :

- Dans un premier temps, on sélectionne les **m** colonnes de $\mathbf{b_i}$ de **B** si elles sont linéairement indépendantes, sinon, on ne retient que **r** colonnes, **r =rang(B).**
- On sélectionne la colonne $\mathbf{Ab_i}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, si elle est linéairement indépendante des colonnes $b_1, \dots, b_r, Ab_1, \dots, Ab_{i-1}$
- On sélectionne la colonne $\mathbf{A^2b_i}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, si elle est linéairement indépendante des colonnes $b_1, \dots, b_r, Ab_1, \dots, A^2b_1, \dots, A^2b_{i-1}$
- On continue jusqu'à obtenir une sélection de n colonnes linéairement indépendantes. Lorsque cet algorithme se termine, on obtient après réarrangement de l'ordre des colonnes, la matrice régulière suivante :
  P_2=[b_1 $Ab_1 \dots A^{c_1-1}b_1$ b_2 $Ab_2 \dots A^{c_2-1}b_2$ ………$b_r \dots A^{c_r-1}b_r$]
  Où les c_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ sont les indices de commandabilité, vérifiant :
  $\sum_{i=1}^{r} c_i = n$ (n est l'ordre du système).

Ensuite on calcule P_2^{-1}

La deuxième FCC, s'écrit : $\begin{cases} A_{c2} = P_2^{-1}AP_2 \\ B_{c2} = P_2^{-1}B \\ C_{c2} = CP_2 \end{cases}$

3.4.3 Troisième forme canonique de commandabilité (forme de Luenberger)

Cette forme est obtenue à partir de P_2^{-1} .

On introduit la notion d'index de commandabilité σ_i, tel que :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} c_j$$

Et on construit la matrice régulière P_3 telle que :

$P_3=\begin{bmatrix} P_{\sigma_1} \\ P_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ P_{\sigma_i}A^{c_1-1} \\ P_{\sigma_2} \\ P_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ P_{\sigma_2}A^{c_2-1} \\ \vdots \\ P_{\sigma_r} \\ P_{\sigma_r}A \\ \vdots \\ P_{\sigma_r}A^{c_r-1} \end{bmatrix}$, avec P_{σ_i} c'est la ième ligne de P_2^{-1}

Ensuite on calcule P_3^{-1}

La troisième FCC, s'écrit : $\begin{cases} A_{c3} = P_3AP_3^{-1} \\ B_{c3} = P_3B \\ C_{c3} = CP_3^{-1} \end{cases}$

Exemple : Soit le système linéaire à temps invariant suivant:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calculer :

1- La $1^{ére}$ FCC simple .
2- La deuxième FCC (forme de Guidorsi)
3- La troisième FCC de Luen berger

La matrice de commandabilité : Mco= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

W=$[b1\ b2\ Ab1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, det(w)=1 (non nul), alors rang (W) =3 donc le système est commandable.

La première FCC : $P_1=[b_1\ Ab_1\ A^2b_1]= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, det($P_1$)= $1 \neq 0$, alors P_1 est inversible.

Et $P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} A_{c1} = P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ B_{c1} = P_1^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

La deuxième FCC : $P_2=[b_1\ Ab_1\ b_2]= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, det(P2)= $-1 \neq 0$, alors P_2 est inversible.

Et $P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} A_{c2} = P_2^{-1}AP_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{c2} = P_2^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

La troisième FCC :

Les indices de commandabilité sont : $\mu_1 = 2 \quad et\ \mu_2 = 1 \quad \Rightarrow \ \sigma_1 = \mu_1 = 2$, et

$$\sigma_2 = \mu_1 + \mu_2 = 3$$

$P_3=\begin{bmatrix} P_{\sigma_1} \\ P_{\sigma_1}A \\ P_{\sigma_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

La troisième FCC, s'écrit : $\begin{cases} A_{c3} = P_3AP_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_{c3} = P_3B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$

3.4. Obtention des formes canoniques d'observabilité

Les résultats précédents concernant les formes de commandabilité se transposent immédiatement pour donner les formes d'observabilité, soit schématiquement :

$S(A\ ,B,C) \longrightarrow S(A^T,C^T,B^T)$.