Chpitre4 : Commande par retour d'état

1. Introduction

La commande par retour d'état est une méthode utilisée pour la correction des systèmes modélisés par leur représentation d'état. Cette méthode utilise le principe de placement de pôles pour améliorer les performances du système étudié.

Le problème de placement de pôles par retour d'état consiste à déterminer déterminer une commande telle les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le demi plan complexe gauche est satisfaire des caractéristiques d'amortissement, de rapidité et de stabilité.

2. Principe du placement de pôles

Nous allons d'bord aborder le cas des systèmes monovariables (SISO) et par la suite nous allons étudier le cas des systèmes multivariables.

2.1. Cas des systèmes SISO :

On considère le système linéaire à temps invariant en boucle ouverte décrit par la représentation d'état suivant e:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Figure 1 : Système en boucle ouverte

Avec : $x(t) \in \Re^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \Re$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \Re$ est le vecteur de sortie.

$A \in \Re^{nxn}$ est la matrice d'état, $B \in \Re^{nx1}$ est la matrice d'entrée et $C \in \Re^{1xn}$ est la matrice de sortie.

Afin de calculer une commande par retour d'état, on suppose que les états x_i (i=1,…n) du vecteur d'état du système sont tous accessibles à la mesure.

On suppose aussi que le système est commandable, c.à.d **rang(Mco)=n.**

Le principe de la méthode consiste à utiliser une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$\mathbf{u(t)=r(t) - Kx(t)} \qquad \mathbf{(2)}$$

u(t) :c'est la commande par retour d'état (loi de commande).

r(t) : c'est la consigne (sortie désirée)

x(t) : vecteur d'état

$K=[k_1\ k_2\ \ldots k_n]$, est un vecteur ligne de ***n*** composantes appelé vecteur des gains du retour d'état.

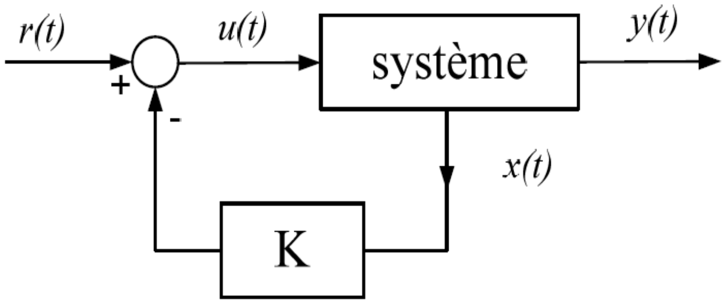

Figure2 : Bouclage du système par un retour d'état

En remplaçant la loi de commande (équation (2)) dans l'équation d'état (1), on obtient la représentation d'état en boucle fermée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A.x(t) + B(r(t) - Kx(t)) \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Br(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

Par conséquent, la matrice d'état du système en boucle fermée vaut $\mathbf{A_{bf} = A - BK}$.
La dynamique du système bouclé est donc fixée par les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée $\mathbf{A_{bf}}$, ces valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique du système en boucle fermée décrit par :

$$\det(pI-A_{bf}) = \det(pI - (A - BK)) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \qquad (4)$$

L'équation caractéristique du système en boucle ouverte est :

$$\det(pI-A)=p^n+a_{n-1}\, p^{n-1}+\ldots+a_1\, p+a_0= 0 \qquad (5)$$

Donc le problème de placement de pôles se résume à ceci : déterminer K tel que la matrice **A-BK** soit stable et vérifiée certaines performances désirées.

La solution à ce problème peut être obtenue, en résolvant directement l'équation (4), ou en suivant cet algorithme dans le cas où la représentation d'état n'est pas sous forme canonique.

Algorithme de placement de pôles

Etape 1 : Vérification de la commandabilité, Si la paire (A,B) n'est pas commandable, le placement de pôles est génériquement impossible.
Etape 2 : Mettre le système sous forme canonique (FCC1)
Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique désiré.
Etape 4 : Détermination du polynôme caractéristique du système en boucle ouverte

Etape 5 : Calcul du retour d'état $\mathbf{K_c}$ dans la base canonique. En résolvant l'équation suivante :

$$A_c - B_c K_c = A_d \qquad (6)$$

Avec :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1.. & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & ..1 \\ -a_0 & -a_1 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad , \; A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1.. & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & ..1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & ... & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } K_c = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1.. & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & ..1 \\ k_1 & k_2 & ... & k_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1.. & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & ..1 \\ -\alpha_0 - k_1 & -\alpha_1 - k_2 & ... & -\alpha_{n-1} - k_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Etape 6 : Calcul du retour d'état dans la base initiale **K=K$_c$P** (matrice de changement de base).

Exemple : on considère le système décrit par le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

En utilisant un retour d'état, on désire faire un placement de pôles aux points : P1=-1 , P2=-1.

La matrice de commandabilité : $M_{com} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t)$

det(M_{com})=-1≠ 0 ⇒ rang(M_{com})=2 , alors le système est commandable.

$$M_{com}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

q=[1 1]

la matrice de passage **P** s'écrit

P=$\begin{bmatrix} q \\ qA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ B_c = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique désiré est $P_d=p^2+2p+1$

La matrice d'état désirée est A_d, avec :

$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (mise sous forme canonique)

On a $A_{bf} = A_c - B_c K_c = A_d \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + k_1 = -1 \\ 3 + k_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 - 2 = -3 \\ k_2 = -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

K_c=[-3 -5]

K= K_cP= [-3 -5] $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$=[-3 -8]

Et :   u(t)=-Kx(t) =-3x_1(t)-8x_2(t)