Corrigé type de l'examen

Exercice 1 : (16 points)

Partie 01 : (08 points)

1. **La forme matricielle AX=b.** (01 points)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}}_{b}$$

2. **La résolution du système (S) par la méthode de Gauss.** (04 points)

Etape 1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 5 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$; Etape 2 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & -22 & -7 & -65 \\ 0 & 9 & 7 & 39 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + (9/22)L_2$

On obtient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & -22 & -7 & -65 \\ 0 & 0 & \frac{91}{22} & \frac{273}{22} \end{array}\right)$ $\quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ -22x_2 - 7x_3 = -65 \\ \frac{91}{22}x_3 = \frac{273}{22} \end{cases}$

Donc la solution de (S) est : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

3. **La décomposition de la matrice A, (A=LU).** (2 points)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -22 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{91}{22} \end{pmatrix}; \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{-9}{22} & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Le déterminant de la matrice A.** (1 points)

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = 1(1)(-22)(\frac{91}{22}) = -91.$$

Partie 01 : (08 points)

1. **Vérification que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel convergent, quelque soit le vecteur initial** $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. (2 points)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} |6| > |2| + |-1| \\ |4| > |1| + |1| \\ |5| > |-2| + |1| \end{cases}$. Donc la matrice A est strictement à diagonale dominante. Alors, les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel associés au système linéaire (S) convergent, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2. **Les trois (3) premiers itérés de la méthode de Jacobi :** (6 points)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(7 - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/6 \\ x_2^{(k+1)} = \left(12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(15 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)/5 \end{cases}$$

K	0	1	2	3
x_1	1	0.81667	0.97500	0.96333
x_2	2.5	2.02500	2.07083	2.02583
X_3	2.9	2.90000	2.92167	2.97583
L'erreur		0.47500	0.15833	0.05417

Exercice 2 : (4 points)

1. **L'algorithme qui permet de résoudre un système linéaire triangulaire inférieure d'ordre n.** (2points)

Étant données la matrice $A = (a_{i,j}),\ 1 \le i, j \le n$, et le vecteur $b = (b_i), 1 \le i \le n$.

Pour $i = 1$, jusqu'à n : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{1,1}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j\right);\ \text{pour } i = 2 \text{ jusqu'à } n \end{cases}$.

2. **L'algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Jacobi.** (2 points)

- Étant données A, b, $X^{(0)}\left(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \ldots; x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$, ε la précision, et/ou *Nb_iter* le nombre d'itérations.
- Pour k=1 jusqu'à *Nb_iter*, ou bien, tant que $Erreur > \varepsilon$, On calcule

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}\right);\ \text{pour } i = 1 \text{ jusqu'à } n$$

$$Erreur = \left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\|$$