Chapitre II: Les quadripôles électriques

2.1. Définition:

Un quadripôle est un réseau qui comporte 4 bornes de liaisons avec les circuits extérieurs (Fig.2.1). Les échanges avec l'extérieur se font au travers de deux bornes utilisées comme **bornes d'entrée** et vers deux autres bornes utilisées comme **bornes de sortie**.

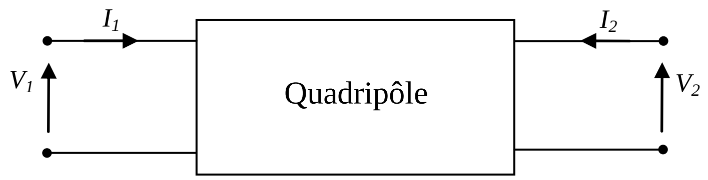


Fig.2.1. Symbole d'un quadripôle.

I_1 et V_1 désignent les grandeurs d'entrée.
I_2 et V_2 désignent les grandeurs de sortie.

2.2. Représentation matricielle d'un quadripôle:

2.2.1. Matrice impédance:

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 2.2.

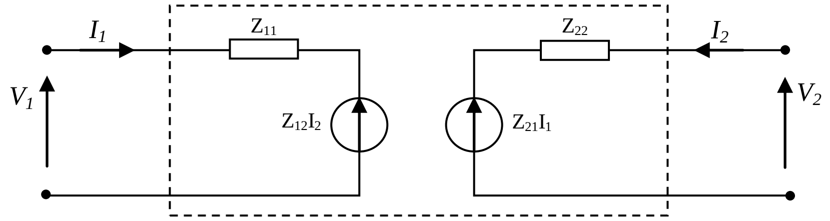


Fig.2.2. Schéma équivalent d'un quadripôles en paramètres Z.

Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$[Z]$ est la matrice impédance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Z en circuit ouvert (I_1=0 ou I_2=0). Ils se définissent comme suit:

Impédance d'entrée: $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{I_2=0}$

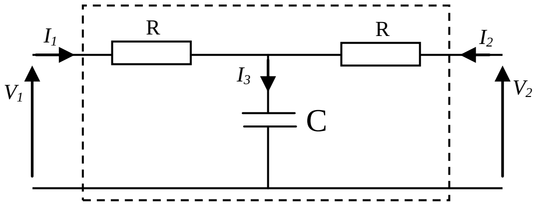
Impédance de transfert inverse: $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}|_{I_1=0}$

Impédance de transfert direct: $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}|_{I_2=0}$

Impédance de sortie: $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}|_{I_1=0}$

Exemple:

Trouver les paramètres Z du filtre passe-bas suivant.



• Impédance d'entrée: $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{I_2=0}$

Si la sortie est en circuit ouvert (I_2=0), alors: I_1=I_3.

Il résulte que: $V_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1$ => $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R + \frac{1}{j\omega C}$

• Impédance de sortie: $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}|_{I_1=0}$

Si l'entrée est en circuit ouvert (I_1=0), alors: I_2=I_3.

On peut alors écrire: $V_2 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2$ => $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = R + \frac{1}{j\omega C}$

• Impédance de transfert inverse: $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}|_{I_1=0}$

$I_1 = 0$ => I_2=I_3 => $V_1 = RI_1 + \frac{1}{j\omega C} I_3 = \frac{1}{j\omega C} I_2$

=> $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{1}{j\omega C}$

• Impédance de transfert direct: $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}|_{I_2=0}$

$I_2 = 0$ => I_1=I_3 => $V_2 = RI_2 + \frac{1}{j\omega C} I_3 = \frac{1}{j\omega C} I_1$

=> $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{1}{j\omega C}$

2.2.2. Matrice admittance:

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 2.3.

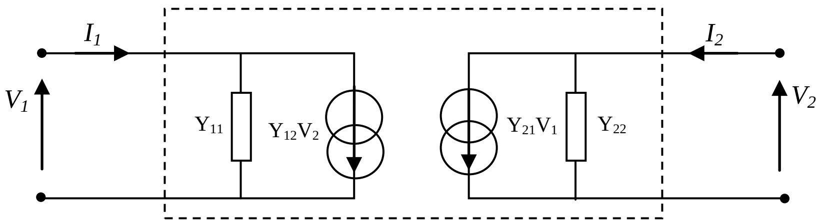


Fig.2.3. Schéma équivalent d'un quadripôles en paramètres Y.

Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettent sous la forme:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$[Y]$ est la matrice admittance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Y en court-circuit (V_1=0 ou V_2=0). Ils se définissent comme suit:

Admittance d'entrée: $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}|_{V_2=0}$

Admittance de transfert inverse: $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}|_{V_1=0}$

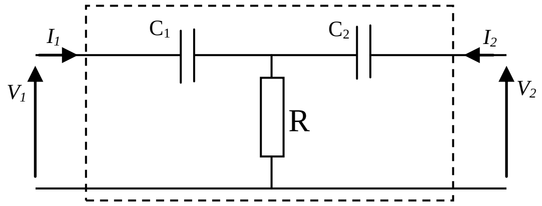
Admittance de transfert direct: $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}|_{V_2=0}$

Admittance de sortie: $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{V_1=0}$

La matrice [Y] est l'inverse de la matrice [Z]: $[Y]=[Z]^{-1}$.

Exemple:

Trouver les paramètres Y du filtre passe-haut suivant.



- Admittance d'entrée: $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}|_{V_2=0}$

Si la sortie est en court-circuit (V_2=0), alors: C_2 et R sont en parallèle et leur impédance équivalente est en série avec C_1. La loi d'Ohm permet d'écrire:

$V_1 = \left(Z_{C1} + (R//Z_{C2})\right)I_1 => Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{(Z_{C1}+(R//Z_{C2}))}$

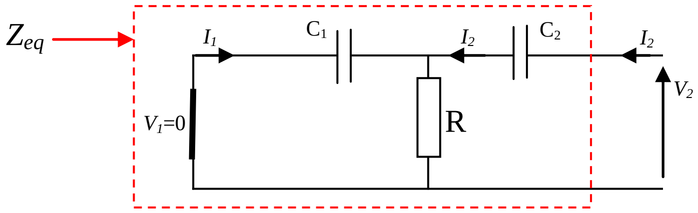
avec: $Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1}$ et $Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$

- Admittance de sortie: $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{V_1=0}$

Si l'entrée est en court-circuit (V_1=0), alors: C_1 et R sont en parallèle et leur impédance équivalente est en série avec C_2. La loi d'Ohm permet d'écrire:

$V_2 = \left(Z_{C2} + (R//Z_{C2})\right)I_2 => Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{(Z_{C2}+(R//Z_{C1}))}$

- Admittance de transfert inverse: $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}|_{V_1=0}$



Dans ce cas, C_1 et en parallèle avec R, ce qui permet d'appliquer le théorème du pont diviseur de courant:

$I_1 = -\frac{Y_{C1}}{Y_{C1}+Y_R}I_2 = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}}+\frac{1}{R}}I_2$,

avec: $Y_{C1} = j\omega C_1$, $Y_R = \frac{1}{R}$

La relation qui relie la tension V_2 au courant I_2 est donnée par la loi d'Ohm:

$V_2 = Z_{eq}I_2$,

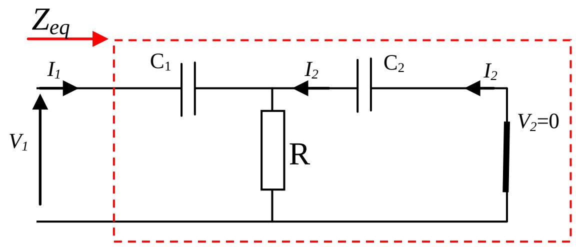
avec: $Z_{eq} = Z_{C2} + (Z_{C1}//R)$, $\quad Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1}$, $\quad Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$

On obtient alors:

$$I_1 = -\frac{Y_{C1}}{Y_{C1}+Y_R}\frac{V_2}{Z_{eq}} = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}}+\frac{1}{R}}\frac{1}{Z_{C2}+(Z_{C1}//R)}V_2$$

$=> Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{\frac{1}{Z_{C1}}}{\frac{1}{Z_{C1}}+\frac{1}{R}} \cdot \frac{1}{Z_{C2}+(Z_{C1}//R)}$

- Admittance de transfert direct: $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}|_{V_2=0}$



Dans ce cas, C_2 et en parallèle avec R, ce qui permet d'appliquer le théorème du pont diviseur de courant:

$I_2 = -\frac{Y_{C2}}{Y_{C2}+Y_R} I_1 = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}}+\frac{1}{R}} I_1$,

avec: $Y_{C2} = j\omega C_2$, $Y_R = \frac{1}{R}$

La relation qui relie la tension V_1 au courant I_1 est donnée par la loi d'Ohm:

$V_1 = Z_{eq} I_1$,

avec: $Z_{eq} = Z_{C1} + (Z_{C2}//R)$, $\quad Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1}$, $\quad Z_{C2} = \frac{1}{j\omega C_2}$

On obtient alors:

$$I_2 = -\frac{Y_{C2}}{Y_{C2}+Y_R}\frac{V_1}{Z_{eq}} = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}}+\frac{1}{R}}\frac{1}{Z_{C1}+(Z_{C2}//R)}V_1$$

$=> Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{\frac{1}{Z_{C2}}}{\frac{1}{Z_{C2}}+\frac{1}{R}} \cdot \frac{1}{Z_{C1}+(Z_{C2}//R)}$

2.2.3. Matrice [h] des paramètres hybrides:

Dans ce cas, nous exprimons V_1 et I_2 en fonction de I_1 et V_2 ce qui donne:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h]\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

h_{11}, h_{12}, h_{21} et h_{22} sont les paramètres hybrides de la matrice hybride [h], avec:

Impédance d'entrée: $h_{11} = \frac{V_1}{I_1}|_{V_2=0}$

Rapport de transfert inverse: $h_{12} = \frac{V_1}{V_2}|_{I_1=0}$

L'amplification en courant: $h_{21} = \frac{I_2}{I_1}|_{V_2=0}$

Admittance de sortie: $h_{22} = \frac{I_2}{V_2}|_{I_1=0}$

Le schéma de ce quadripôle équivalent est donné à la figure 2.4.

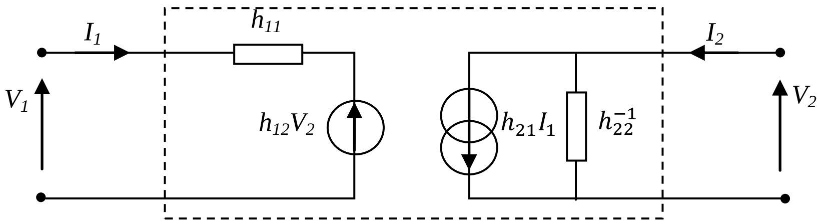


Fig.2.4. Schéma équivalent d'un quadripôles en paramètres hybrides.

2.2.4. Matrice de transfert [T]:

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée:

$$V_2 = T_{11}V_1 - T_{12}I_1$$
$$I_2 = T_{21}V_1 - T_{22}I_1$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

T_{11} est l'amplification en tension.

T_{22} est l'amplification en courant.

T_{12} est une impédance et T_{21} une admittance.

2.3. Association de quadripôles:

2.3.1. Association en série de deux quadripôles:

Dans ce cas, la tension d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant (Fig.2.5) est la somme des tensions d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en série:

$V_1 = V'_1 + V"_1$ et $V_2 = V'_2 + V"_2$

Les courants sont identiques:

$I_1 = I'_1 = I"_1$ et $I_2 = I'_2 = I"_2$

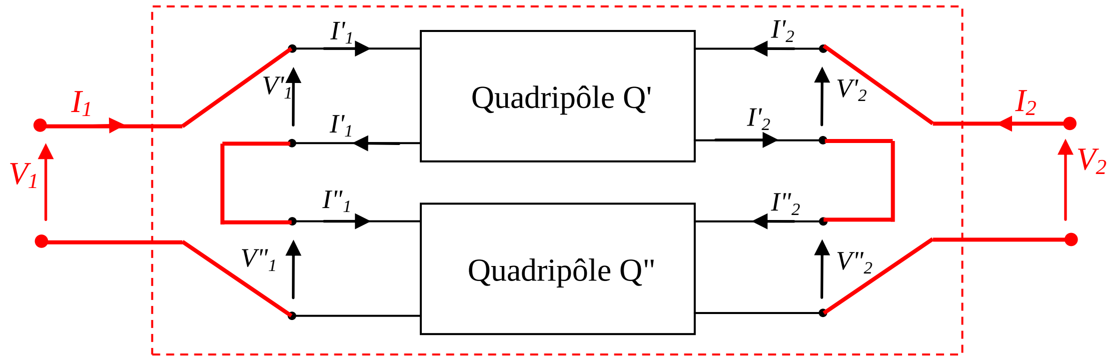


Fig.2.5. Association en série de deux quadripôles.

La matrice [Z] du quadripôle équivalent à la mise en série de Q' et Q" est donnée par:

$$[Z] = [Z'] + [Z"]$$

2.3.2. Association en parallèle de deux quadripôles:

Dans ce cas, le courant d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant (Fig.2.6) est la somme des courants d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en parallèle:

$I_1 = I'_1 + I"_1$ et $I_2 = I'_2 + I"_2$

Les tensions sont identiques:

$V_1 = V'_1 = V"_1$ et $V_2 = V'_2 = V"_2$

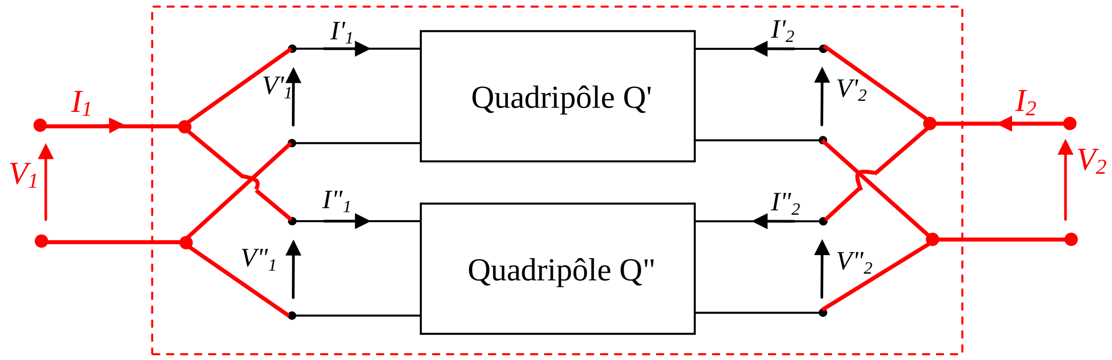


Fig.2.6. Association en parallèle de deux quadripôles.

La matrice [Y] du quadripôle équivalent à la mise en parallèle de Q' et Q'' est donnée par:

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

2.3.3. Association en cascade de deux quadripôles:

Dans ce cas, la tension de sortie du premier quadripôle est la tension d'entrée du deuxième quadripôle (Fig.2.7):

$V_1 = V'_1$, $V'_2 = V''_1$ et $V_2 = V''_2$

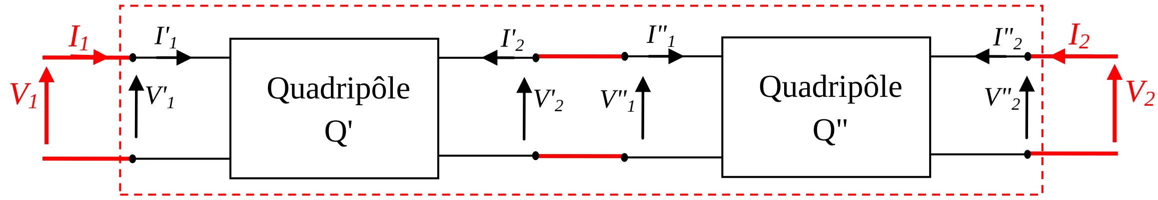


Fig.2.7. Association en cascade de deux quadripôles.

La matrice [T] du quadripôle équivalent à la mise en cascade de Q' et Q'' est donnée par:

$$[T] = [T''] \times [T']$$

2.4. Caractéristiques d'un quadripôle en charge et attaquée par une source de tension réelle:

Pour caractériser un quadripôle, on connecte un dipôle source (E_g, R_g) aux deux bornes d'entrée. Aux deux bornes de sortie, nous branchons un dipôle de charge noté Z_U (Fig.2.8).

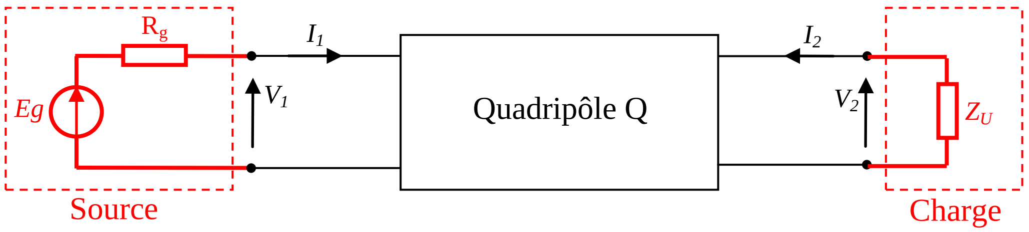


Fig.2.7. Quadripôle en charge et attaqué par une source de tension réelle.

Si par exemple nous définissons le quadripôle Q par ses paramètres Z, les équations qui permettent de déterminer l'état du réseau sont:

$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$ **(1)**

$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$ **(2)**

$E_g = V_1 + R_gI_1$ **(3)**

$V_2 = -Z_UI_2$ **(4)**

2.4.1. Impédance d'entrée:

L'impédance d'entrée est l'impédance « vue » par la source qui attaque le quadripôle à vide ou en charge (Fig2.8).

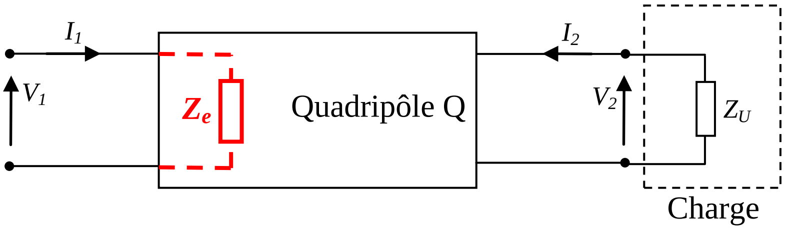


Fig.2.8. Impédance d'entrée d'un quadripôle.

L'impédance d'entrée est donnée par: $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$

Si nous utilisons les paramètres Z (les équations (1), (2) et (4)), nous obtiendrons:

$Z_e = \frac{Z_U Z_{11} + \Delta Z}{Z_U + Z_{22}}$

avec: $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ est le déterminant de la matrice [Z].

2.4.2. Impédance de sortie:

Vis-à-vis de la charge, le quadripôle se comporte comme un dipôle équivalent au générateur de Thévenin (Fig2.9).

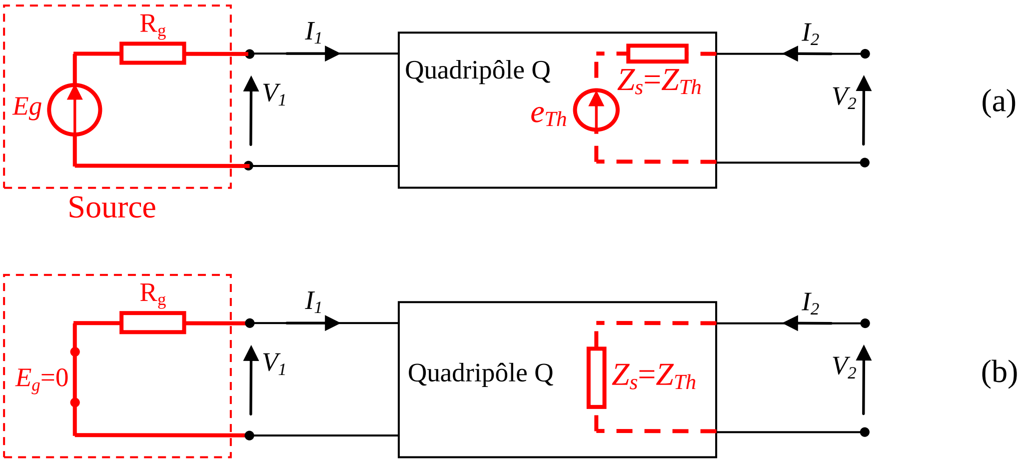


Fig.2.9. Impédance de sortie Z_s d'un quadripôle. (a) Représentation de la sortie du quadripôle par son équivalent de Thévenin. (b) Schéma utilisé pour le calcul de Z_s.

L'impédance de sortie est donnée par: $Z_s = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{E_g=0}$

Si nous utilisons les paramètres Z (les équations (1), (2) et (3)), nous obtiendrons:

$Z_s = \frac{R_g Z_{22} + \Delta Z}{R_g + Z_{11}}$

2.4.3. Gain en tension:

Le gain en tension est défini par le rapport de la tension de sortie V_2 du quadripôle par la tension d'entrée:

$G_V = \frac{V_2}{V_1}$

Si le quadripôle est défini par les paramètres Z et par l'utilisation des équations (1), (2), (3) et (4), il résulte:

$$G_V = \frac{Z_{21}Z_U}{Z_{11}Z_U + \Delta Z}$$

2.4.4. Gain en courant:

Le gain en courant est défini par le rapport du courant de sortie I_2 du quadripôle par le courant d'entrée:

$G_I = \frac{I_2}{I_1}$

Si le quadripôle est défini par les paramètres Z et par l'utilisation des équations (2) et (4), il résulte:

$$G_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + \Delta Z}$$

Exemple:

Calculer l'impédance d'entrée, l'impédance de sortie, le gain (l'amplification) en tension et le gain (l'amplification) en courant du quadripôle de la figure 2.10. Le quadripôle est attaqué par une source E_g de résistance interne R_g et chargé par l'impédance Z_L.

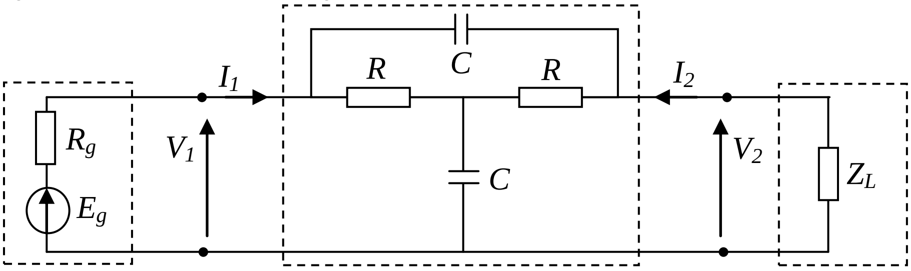
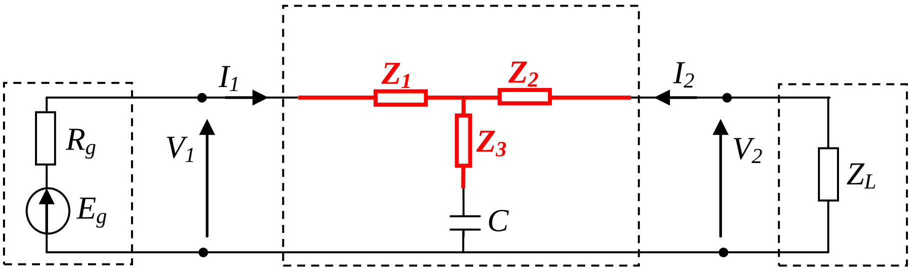


Fig.2.10. Exemple de calcul des caractéristiques d'un quadripôle passif.

Nous commençons par le calcul des paramètres Z du quadripôle.

En utilisant le théorème de Kennelly, le schéma du quadripôle devient:



avec:

$Z_1 = Z_2 = \frac{R \cdot Z_C}{2R + Z_C}$

$Z_3 = \frac{R^2}{2R + Z_C}$

De la même manière que dans le paragraphe 2.2.1., les paramètres Z sont donnés par:

$Z_{11} = Z_1 + (Z_3 + Z_C)$

$Z_{12} = Z_3 + Z_C$

$Z_{21} = Z_3 + Z_C = Z_{12}$

$Z_{22} = Z_2 + (Z_3 + Z_C) = Z_{11}$

Il est clair que le déterminant de la matrice Z est égale à zéro: $\Delta Z=0$. Il résulte:

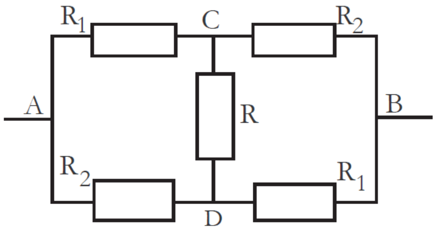
$Z_e = \frac{Z_U Z_{11} + \Delta Z}{Z_U + Z_{22}} = \frac{Z_U Z_{22}}{Z_U + Z_{22}}$; $\quad Z_s = \frac{R_g Z_{22} + \Delta Z}{R_g + Z_{11}} = \frac{R_g Z_{11}}{R_g + Z_{11}}$

$G_V = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$; $\quad G_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = -G_V$

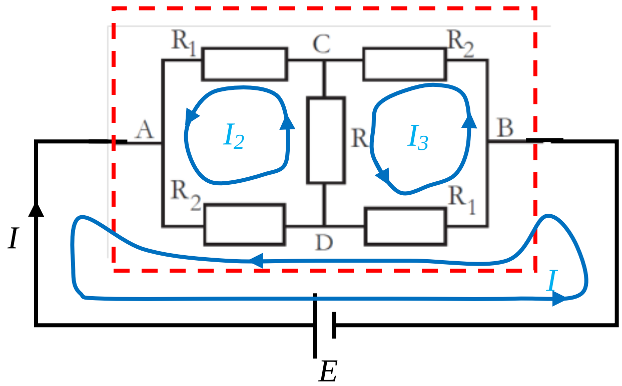
Solutions des exercices de la série N°2:

<u>Exercice N°1:</u>

Calculer la résistance équivalente du réseau suivant en utilisant les regroupements de résistances (série, parallèle, triangle-étoile).



1ère méthode: en utilisant la loi d'Ohm



Selon la loi d'Ohm, la résistance du dipôle, R_{AB}, est donnée par:

$$R_{AB} = \frac{E}{I}$$

Pour trouver la relation qui existe entre le courant I et la tension E, on peut utiliser par exemple la méthode des mailles comme suit:

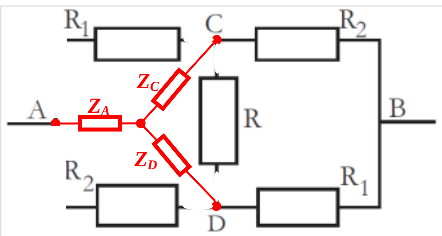
$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 + R_2 + R & -R \\ -R_1 & -R & R_1 + R_2 + R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

=>

$$\begin{pmatrix} I \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 + R_2 + R & -R \\ -R_1 & -R & R_1 + R_2 + R \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} +E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement on peut déduire la résistance du quadripôle: $R_{AB} = \frac{E}{I}$

2ème méthode: en utilisant le théorème de Kennelly.



On remarque que Z_C est en série avec R_2 et Z_D est en série avec R_1, donc:

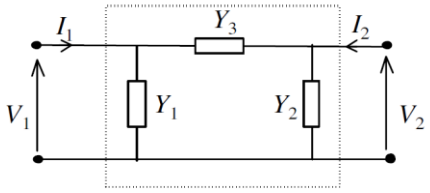
$$R_{AB} = Z_A + \left((Z_C + R_2)//(Z_D + R_1)\right)$$

avec:

$$Z_A = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R}$$
$$Z_C = \frac{R_1R}{R_1+R_2+R}$$
$$Z_D = \frac{R_2R}{R_1+R_2+R}$$

Exercice N°2:

1) Soit le quadripôle en **π** de la figure ci-dessous. Calculer les paramètres Z de la matrice impédance de ce quadripôle.



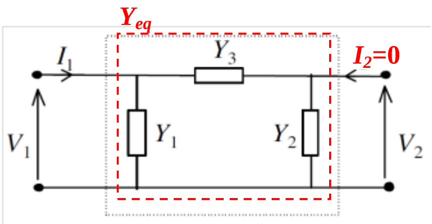
Les équations caractéristiques du quadripôle équivalent en Z sont données par:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

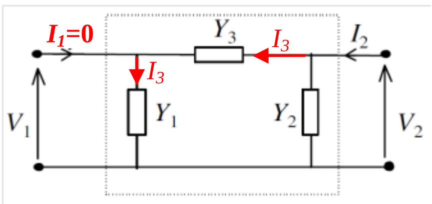
- $Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}$:



$I_1 = Y_{eq}V_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{Y_{eq}}$

avec: $Y_{eq} = Y_1 + \frac{1}{\frac{1}{Y_2}+\frac{1}{Y_3}}$

- $Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$:



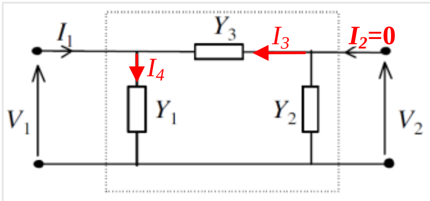
En appliquant le théorème du pont diviseur de courant:

$$I_3 = \frac{\frac{1}{Z_1+Z_3}}{\frac{1}{Z_1+Z_3}+\frac{1}{Z_2}} I_2 \quad \text{, avec: } Z_1 = \frac{1}{Y_1}, Z_2 = \frac{1}{Y_2}, Z_3 = \frac{1}{Y_3}$$

On a aussi: $V_1 = Z_1 I_3$

Alors: $V_1 = Z_1 I_3 = Z_1 \frac{\frac{1}{Z_1+Z_3}}{\frac{1}{Z_1+Z_3}+\frac{1}{Z_2}} I_2 \Rightarrow Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = Z_1 \frac{\frac{1}{Z_1+Z_3}}{\frac{1}{Z_1+Z_3}+\frac{1}{Z_2}}$

- $Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2 = 0}$:



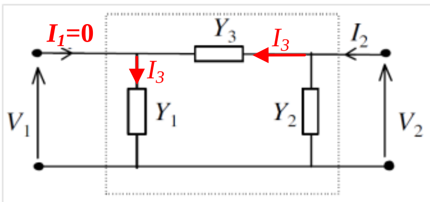
En appliquant le théorème du pont diviseur de courant:

$$I_3 = -\frac{\frac{1}{Z_2+Z_3}}{\frac{1}{Z_2+Z_3}+\frac{1}{Z_1}} I_1 \quad \text{, avec: } Z_1 = \frac{1}{Y_1}, Z_2 = \frac{1}{Y_2}, Z_3 = \frac{1}{Y_3}$$

On a aussi: $V_2 = -Z_2 I_3$

Alors: $V_2 = -Z_2 I_3 = Z_2 \frac{\frac{1}{Z_2+Z_3}}{\frac{1}{Z_2+Z_3}+\frac{1}{Z_1}} I_1 \Rightarrow Z_{12} = \frac{V_2}{I_1} = Z_2 \frac{\frac{1}{Z_2+Z_3}}{\frac{1}{Z_2+Z_3}+\frac{1}{Z_1}}$

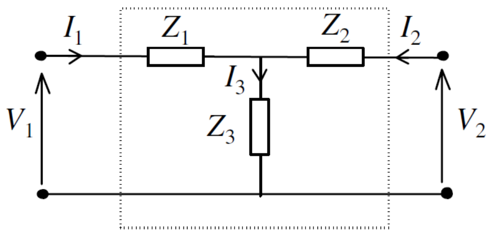
- $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1 = 0}$:



On remarque que Y_1 est en série avec Y_3. En appliquant la loi d'Ohm:

$V_2 = Z_{eq} I_2 = \left(Z_2 // (Z_1 + Z_3)\right) I_2 \Rightarrow Z_{22} = \frac{1}{\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_1+Z_3}}$

2) Soit le quadripôle en **T** de la figure ci-dessous. Calculer les paramètres Y de la matrice admittance de ce quadripôle.



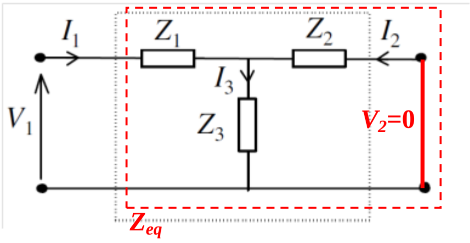
Les équations caractéristiques du quadripôle en paramètres Y peuvent se mettent sous la forme:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$
$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

- $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2 = 0}$:

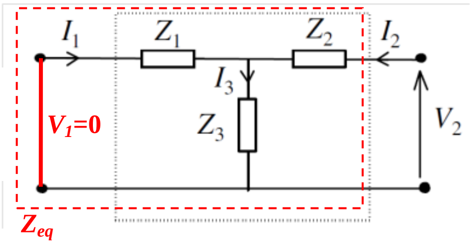


La loi d'Ohm nous permet d'écrire:

$$V_1 = Z_{eq} I_1 = \big(Z_1 + (Z_3 // Z_2)\big) I_1$$

=> $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{Z_1 + (Z_3//Z_2)}$

- $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1 = 0}$:



La loi d'Ohm nous permet d'écrire:

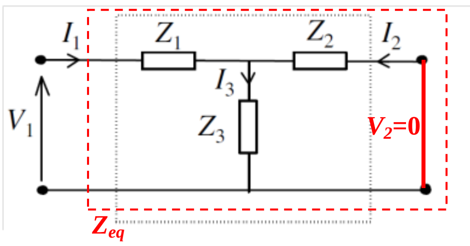
$$V_2 = Z_{eq} I_2 = \big(Z_2 + (Z_3 // Z_1)\big) I_2$$

Z_1 et Z_3 sont en parallèle, alors:

$$I_1 = -\frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}} I_2$$

=> $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-\frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_3}} I_2}{(Z_2 + (Z_3//Z_1)) I_2} = -\frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$

- $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2 = 0}$:



La loi d'Ohm nous permet d'écrire:

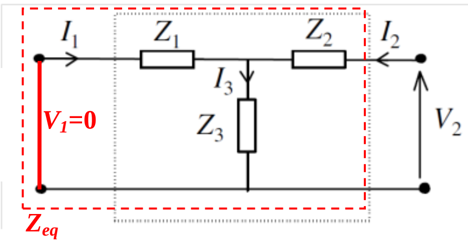
$$V_1 = Z_{eq} I_1 = \big(Z_1 + (Z_3 // Z_2)\big) I_1$$

Z_2 et Z_3 sont en parallèle, alors:

$$I_2 = -\frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}} I_1$$

=> $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{-\frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}}I_1}{(Z_1+(Z_3//Z_2))} = -\frac{Z_3}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}$

- $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$:



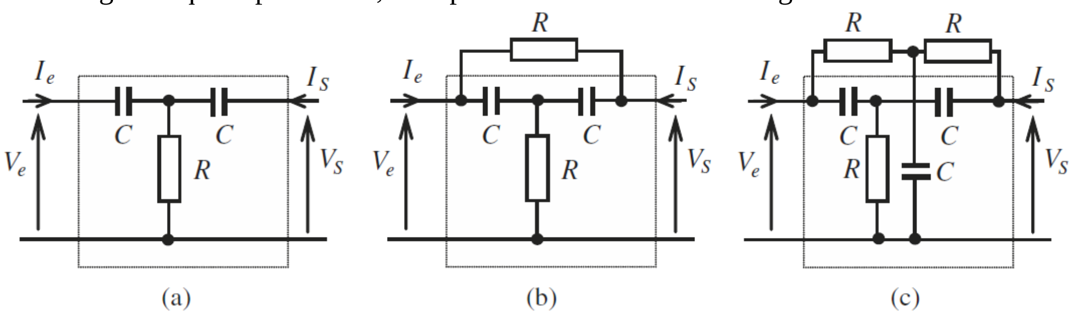
La loi d'Ohm nous permet d'écrire:

$$V_2 = Z_{eq}I_2 = \big(Z_2 + (Z_3//Z_1)\big)I_2$$

=> $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{Z_2+(Z_3//Z_1)}$

<u>Exercice N°3:</u>

Soit les montage des quadripôles en *T*, en *T* ponté et en double *T* de la figure ci-dessous.



1. Déterminer la matrice admittance du quadripôle de la figure (a).

De la même manière que dans l'exercice précédent (question 2), avec:

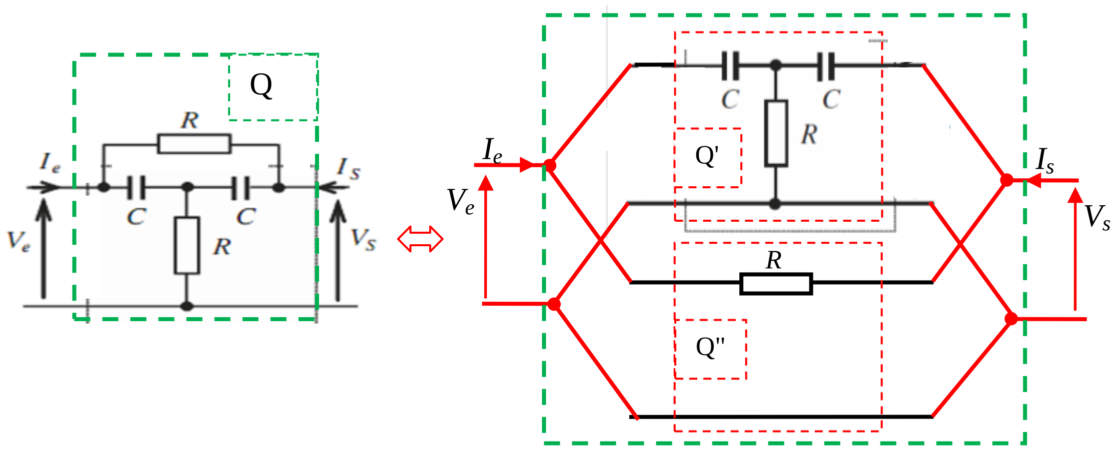
$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_3 = R$

Donc:

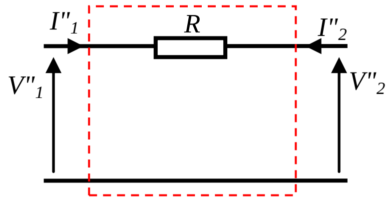
$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{1}{Z_1 + (Z_3//Z_2)}$$
$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$
$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}$$
$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{Z_2 + (Z_3//Z_1)}$$

2. En déduire la matrice admittance du montage (b) et (c).

Montage (b):



Ce montage est l'association de deux quadripôles en parallèle: le premier est un quadripôle en T (Q') et le deuxième est un quadripôle série (Q") qui contient une seule résistance R.
La matrice admittance du quadripôle Q est la somme des matrices admittance des deux quadripôles Q' et Q": [Y]=[Y']+[Y"].
On a déjà déterminé la matrice admittance du quadripôle en T. Il nous reste que déterminer la matrice admittance du quadripôle série.



- $Y''_{11} = \frac{I''_1}{V''_1}\Big|_{V''_2=0}$:

  Si la sortie est en court-circuit (V''_2=0), alors: $V''_1 = RI''_1 \Rightarrow Y''_{11} = \frac{I''_1}{V''_1} = \frac{1}{R}$

- $Y''_{22} = \frac{I''_2}{V''_2}\Big|_{V''_1=0}$:

  Si l'entrée est en court-circuit (V''_1=0), alors: $V''_2 = RI''_2 \Rightarrow Y''_{22} = \frac{I''_2}{V''_2} = \frac{1}{R}$

- $Y''_{12} = \frac{I''_1}{V''_2}\Big|_{V''_1=0}$:

  Si l'entrée est en court-circuit (V''_1=0), alors:

  $V''_2 = RI''_2 = -RI''_1 \Rightarrow Y''_{12} = \frac{I''_1}{V''_2} = -\frac{1}{R}$

- $Y''_{21} = \frac{I''_2}{V''_1}\Big|_{V''_2=0}$:

  Si la sortie est en court-circuit (V''_2=0), alors:

  $V''_1 = RI''_1 = -RI''_2 \Rightarrow Y''_{21} = \frac{I''_2}{V''_1} = -\frac{1}{R}$

Les paramètres Y de la matrice admittance du quadripôle équivalent à la mise en parallèle des deux quadripôles (quadripôle en T et quadripôle série) est donnée par:

$$Y_{11} = Y_{11}(T) + Y_{11}(série) = \frac{1}{Z_1 + (Z_3//Z_2)} + \frac{1}{R}$$

$$Y_{12} = Y_{12}(T) + Y_{12}(série) = -\frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} - \frac{1}{R}$$

$$Y_{21} = Y_{21}(T) + Y_{21}(série) = -\frac{Z_3}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3} - \frac{1}{R}$$

$$Y_{22} = Y_{22}(T) + Y_{22}(série) = \frac{1}{Z_2 + (Z_3//Z_1)} + \frac{1}{R}$$