الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

جامـــعــة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلــــــــــــــــــوم
قسم الفيزيـــــــــــــاء

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Notes de Cours du module

Fonction de La Variable Complexe

(Math 4)

Bounab Sabrina

Deuxième Année Licence Physique

Année Universitaire 2020/2021

Table des matières

CHAPITRE1 : Fonctions Holomorphes

1.1 Le plan Complexe ₵

✓ On peut définir un nombre complexe z par la donnée de deux coordonnées réels:

$$\boldsymbol{z = (x,y) = x + iy} \ \ \textbf{où}\ \boldsymbol{i = \sqrt{-1}} \quad , \qquad \boldsymbol{i^2 = -1}\ avec\ x,y \in \mathbb{R}^2$$

On appelle x la partie réelle de z et on note $x = Re(z)$, tandis que y est la partie imaginaire de z et on note $y = Im(z)$.

✓ Tout nombre complexe possède un conjugue noté $\bar{z}$: $\bar{z} = x - iy$.

Propriétés :

Soit $z\ et\ z'$deux nombres complexes, alors on a :

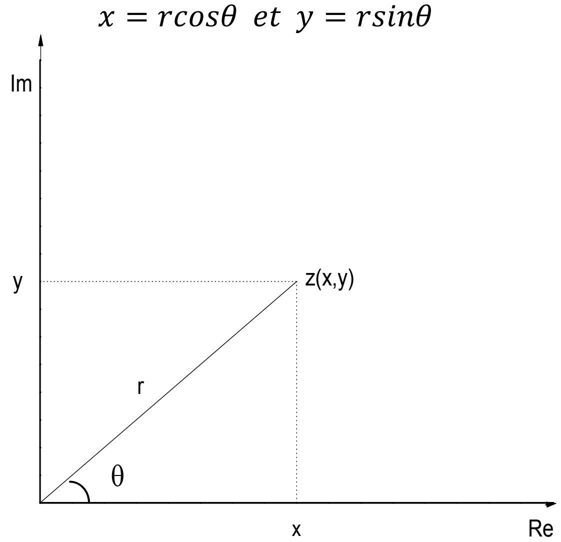
- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
- $z - \bar{z} = i2\,Im(z)$
- $z.z' = xx' - yy' + i(x'y + xy')$
- $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$

Forme polaire des nombres complexes

Un nombre complexe peut être aussi représenté dans un plan de type cartésien ou l'axe horizontal mesure la *valeur* de x (l'axe des réels), et l'axe vertical mesure la *valeur* de y (l'axe des imaginaires).

On remarque qu'on peut remplacer le couple (x, y) par le couple (r, θ) d'où :

$$x = rcos\theta \ \ et\ \ y = rsin\theta$$



Avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, et θ est appelé l'argument ou l'amplitude de z.

Donc on peut récrire z sous la forme : $z = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta} = |z|e^{iarg\,z}$

Cette dernière représentation est appelée la notation polaire, elle permet de calculer facilement toute puissance, positive, négative ou fractionnelle d'un nombre complexe, ce qui conduit d'écrire les propriétés suivantes :

- $z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

1.2 Fonction d'une variable Complexe

1.2.1 Définition: On appelle fonction d'une variable complexe, une application de C dans C

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

Etant donné qu'on peut écrire le nombre complexe z comme $z = x + iy$, par conséquent on peut écrire aussi la fonction $f(z)$(qui est également un nombre complexe) comme :

$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, où $\mathcal{R}ef(z) = P(x,y)$ et $Imf(z) = Q(x,y)$.

On est donc ramené à une application de $\Re^2$ dans $\Re^2$, et ceci en posant $\varphi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Exemple1 :

La fonction $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \implies P(x,y) = x^2 - y^2$ *et* $Q(x,y) = 2xy$

***1.2.2 Limite* :** Soit $f(z)$ une fonction complexe à une variable complexe; on dit que $f(z)$ admet une limite

l en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : tel\ que\ |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - l| < \varepsilon$$
$$Et\ on\ note\ \lim_{z\to z_0} f(z) = l$$

Posons alors $l = a + ib$ où a et b sont deux réels, alors :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) = a \quad et \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) = b \right)$$

On a aussi:

•$\lim_{z\to\infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{A} > 0\ tel\ que\ |z| > \mathrm{A} \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$

• $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{A} > 0, \exists \eta > 0\ tel\ que\ |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z)| < \mathrm{A}$

• $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \beta > 0 \; tel\; que \; |z| > \; \beta \Rightarrow |f(z)| < A$

1.2.3 Continuité

On dit que la fonction $f(z)$ est continue en z_0, si elle admet une limite en z_0 et que cette limite vaut $f(z_0)$.

Propriétés :

• si $f(z) \; et \; g(z)$ sont continues en z_0 alors, $f + g, f.g, f \circ g \; et \; \frac{f}{g} \; (g(z_0) \neq 0)$ le sont aussi.

• $f(z)$ continue en $z_0 \Leftrightarrow P(x,y) \; et \; Q(x,y)$sont aussi continues en (x_0, y_0).

1.3 Fonctions Holomorphes

1.3.1 Définition

Soit D une région dans le plan complexe et soit $f(z)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$ On dit que $f(z)$ est holomorphe en z_0 si $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe, et dans ce cas *elle sera notée*$f'(z_0)$.

f est holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable en z_0.

La fonction est dite holomorphe dans D si elle est dérivable en chaque point z de D.

Propriétés :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f.g)' = f'.g + f.g'$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$

1.3.2 Conditions de Cauchy-Riemann

La fonction $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est différentiable dans un domaine D du champ complexe $\mathbb{C}$, si et seulement si, les fonctions $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont différentiables en tout point de D, et si leurs dérivées vérifient ***les conditions de Cauchy-Riemann*** :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array}} \qquad (1)$$

1.3.3 Théorème : La dérivée $f'(z)$ donc en un point z quelconque est donnée par:

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{aligned}}$$

Exemples :

- 1. $f(z) = z^2$

$\forall z \in \mathbb{C}$: $f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ d'où: $\begin{cases} P(x,y) = (x^2 - y^2) \\ Q(x,y) = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ et\ aussi \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$f'(z) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} :\ f'(z) = 2z$

- 2. $f(z) = \frac{1}{z}$

$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$: $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ d'où: $\begin{cases} P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ et \\ Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ et\ aussi \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Donc on a les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, par conséquent f est dérivable, et

$f'(z) = \frac{y^2-x^2+i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{(z\bar{z})^2} = -\frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} :\ f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

1.3.4 *Propriétés*

I. Remarquons qu'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(P + iQ)}{\partial x} + i\frac{\partial(P + iQ)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est:

$$\boxed{\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathcal{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0} \quad (2)$$

II. On a aussi: $df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

Comme : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$ (3)

Et que $\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2i} \end{cases}$

En substituant ces dernières relations dans(3) et en utilisant(2), on a: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Finalement, f dérivable $\Rightarrow df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz = f'(z)dz$

Donc, si f est dérivable, $f(z)$ ne doit pas contenir de termes en z(aussi ni $\mathcal{R}ez = \frac{z+\bar{z}}{2}$, ni $Imfz = \frac{z-\bar{z}}{2i}$,ni $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$). Alors on peut écrire les conditions de Cauchy-Riemann sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$$

Exemple :

Soit la fonction $f(z)$ définie par : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2.Imz$

On a alors : $f(z) = \frac{1}{z} - z^2.\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \frac{1}{z} - \frac{z^3}{2i} + \frac{z^2\bar{z}}{2i} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z^2}{2i} \neq 0$

D'où la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.

1.4 Fonctions Harmoniques

Si les dérivées partielles secondes de P et Q par rapport à x et à y$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \ et \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$ existent et sont continues dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors on peut tirer des conditions de Cauchy- Riemann (1) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad et \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

Par conséquent, les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe vérifient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad ou\ \Delta\, \Psi = 0 \ \text{ avec } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

L'opérateur Δ est appelé le Laplacien.

Des fonctions telles que $P\ (x, y)\ et\ Q\ (x\ , y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}$ sont appelée fonctions harmoniques et sont dites harmoniques dans $\mathbb{R}$.

Théorème : soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction f harmonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P$ ou bien $(Im(f) = P)$.

Exemple : Trouver une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P(x,y) = cosxchy$

Solution : le domaine de définition de P est $\mathbb{R}^2$, vérifiant que P est harmonique :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -sinxchy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -cosxchy \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = cosxshy \Longrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \ cosxchy \qquad (2)$$

Par addition de (1) et (2) on obtient $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que P est harmonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f holomorphe telle que $= P + iQ$, les conditions de Cauchy- Riemann s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -sinxchy & (1) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = cosxshy & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire $Q(x,y) = \int -sinxchy \ \partial y \Longrightarrow Q(x,y) = -sinxshy + g(x)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -cosxshy + g'(x)$$

Et de l'équation (2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = -cosxshy \Longrightarrow g'(x) = 0$ alors $g(x) = C^{te}$

D'où $Q(x,y) = -sinxshy + C$

Finalement on trouve :

$$f = cosxchy - isinxshy + \text{ic}$$