Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de L'informatique
Département de Mathématique
Module: **Optimisation sans contraintes**
Pour 3ième Année Licence
Année: 2020/2021
La durée d'examen: *(1h) Une heure*

Examen Final (02 Mars 2021)

Exercice 1 (10 pts):

I) Soient A, B deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que $A + B$ est convexe.
2) Soit $b \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$A + b \text{ est convexe.}$$

II) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que $g(x) = e^{f(x)}$ est concave sur I.
1) Montrer que f est concave sur I.
2) En déduire la concavité de

$$f(x) = \ln(1 - e^x) \text{ sur } I =]-\infty, 0[\,.$$

3) Établir que pour tout $0 < a, b < 1$, alors

$$1 - \sqrt{ab} \geq \sqrt{(1-a)(1-b)}$$

Exercice 2 (10 pts):

I) Soient $\alpha \neq 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y) = \alpha\left(x^2 + y^2\right) - x - 2y.$$

1) Calculer le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f.
2) Trouver les points critiques de f.
3) Etudier suivant la valeur de α la nature de ces points.

II) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - z + 1.$$

1) Ecrire la fonction f sous forme matricielle.
2) Calculer le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f.
3) Résoudre le problème d'optimisation

$$\min_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,.$$

Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et de L'informatique
Département de Mathématique
Module: **Optimisation sans contraintes**
Pour 3ième Année Licence
Année: 2020/2021
La durée d'examen: *(1h) Une heure*

Correction et Barème (Examen Final) (02 Mars 2021)

Exercice 1:

I) Soient A, B deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$.
1) (**02pts**) Soient $x, y \in A+B$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. On va montrer que

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A+B.$$

On a

$$\begin{cases} x \in A+B \\ y \in A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists a \in A \text{ et } b \in B : x = a+b \\ \exists a' \in A \text{ et } b' \in B : y = a'+b' \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda (a+b) + (1-\lambda)(a'+b') \\ &= \lambda a + (1-\lambda) a' + \lambda b + (1-\lambda) b' \end{aligned}$$

Comme A est convexe alors $\lambda a + (1-\lambda) a' \in A$
Comme B est convexe alors $\lambda b + (1-\lambda) b' \in B$
Finalement, on a

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \underbrace{\lambda a + (1-\lambda) a'} + \underbrace{\lambda b + (1-\lambda) b'} \in A+B.$$

2) (**02pts**) Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Soient $x, y \in A+b$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. On va montrer que

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in A+b.$$

Nous avons

$$\begin{cases} x \in A+b \\ y \in A+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists a \in A : x = a+b \\ \exists a' \in A : y = a'+b \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda (a+b) + (1-\lambda)(a'+b) \\ &= \lambda a + (1-\lambda) a' + \lambda b + (1-\lambda) b \\ &= \underbrace{\lambda a + (1-\lambda) a'} + b \in A+b \end{aligned}$$

II) Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Supposons que $g(x) = e^{f(x)}$ est concave sur I.
1) (**02pts**) Soient $x, y \in I$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Comme g est concave, on a

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

c'est à dire

$$e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)} \geq \lambda e^{f(x)} + (1-\lambda)\, e^{f(y)}$$

comme la fonction logarithmique ln est croissante et concave on a

$$\begin{aligned} \ln e^{f(\lambda x+(1-\lambda)y)} &\geq \ln\left(\lambda e^{f(x)} + (1-\lambda)\, e^{f(y)}\right) \\ &\geq \lambda \ln\left(e^{f(x)}\right) + (1-\lambda)\ln\left(e^{f(y)}\right) \\ &\geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

2) (**02pts**) On pose

$$g(x) = e^{f(x)} = 1 - e^{x}$$

on a bien

$$g''(x) = -e^{x} < 0 \text{ sur } I =]-\infty, 0[\Rightarrow g \text{ est concave sur } I =]-\infty, 0[$$

3) (**02pts**) On pose

$$x = \ln(a) \text{ et } y = \ln(b)$$

la fonction $f(x) = \ln(1-e^{x})$ est concave, alors

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}\right) &\geq \frac{1}{2}\ln(1-e^{x}) + \frac{1}{2}\ln(1-e^{y}) \\ &\geq \ln\sqrt{1-e^{x}} + \ln\sqrt{1-e^{y}} \\ &\geq \ln\left(\sqrt{1-e^{x}} \times \sqrt{1-e^{x}}\right) \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{cases} \ln\left(1 - e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}\right) = \ln\left(1 - e^{\ln\sqrt{a}+\ln\left(\sqrt{b}\right)}\right) = \ln\left(1-\sqrt{ab}\right) \\ \ln\left(\sqrt{1-e^{x}} \times \sqrt{1-e^{x}}\right) = \ln\left(\sqrt{1-e^{\ln(a)}} \times \sqrt{1-e^{\ln(b)}}\right) = \ln\left(\sqrt{(1-a)(1-b)}\right) \end{cases}$$

alors, on introduit la fonction e on trouve

$$1 - \sqrt{ab} \geq \sqrt{(1-a)(1-b)}.$$

Exercice 2

I) Soient $\alpha \neq 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \alpha\left(x^2+y^2\right) - x - 2y.$$

1)
$\nabla f(x,y) = (2\alpha x - 1, 2\alpha y - 2)^T$(**01pt**)
$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$(**01pt**)
2) Les points critiques de f :
$\nabla f(x,y) = (0,0)^T \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\alpha} \\ y = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$.(**01pt**)

3)
Si $\alpha > 0$ la matrice hessienne est définie positive, alors $\left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ est un *minimum global*.(**01pt**)
Si $\alpha < 0$ la matrice hessienne est définie négative, alors $\left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ est un *maximum global*.(**01pt**)

II) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - z + 1.$$

1) La fonction f s'ecrit sous la forme

$$f(x, y, z) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - b^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; (\underline{\mathbf{1pt}}) \\ b &= (1, 0, 1)^T; (\underline{\mathbf{0,5pt}}) \\ c &= 1.(\underline{\mathbf{0,5pt}}) \end{aligned}$$

2)
$\nabla f(x, y, z) = (2x + y - 1, x + 2y, 2z - 1)^T$.(**0,5pt**)
$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.(**0,5pt**)
3)
$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)^T \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.(**01pt**)
Conclusion: Comme la matrice hessienne est définie positive, alors le point $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ est un min glabal.(**01pt**)