

Chapitre

2

Écoulements compressibles

2.1. Equations générales

On considère un élément de fluide de volume V et la pression exercée sur cet élément fluide est P . La compressibilité est une propriété des fluides. Les liquides ont une très faible valeur de la compressibilité. Il est connu qu'un fort gradient de pression est synonyme d'un écoulement à forte vitesse (cas des gaz). De tels écoulements où la masse volumique est variable sont connus comme des écoulements compressibles [4].

2.1.1. Vitesse du son

Le son est produit par des variations faibles de la pression du milieu dans lequel il se propage. Ainsi, la vitesse du son correspond à la propagation de ces variations de pression. Imaginons un milieu fluide, un gaz par exemple, dans lequel on observe localement une différence de pression dP entre la partie droite 1 et la partie gauche 2 du milieu (figure 2-1) et admettons que la zone de variation soit plane et de dimension infinie. L'onde sonore, se déplace, par définition, à la vitesse du son V_s . Dans le mouvement relatif onde sonore-fluide, le fluide se déplace par rapport à l'onde à la même vitesse. La section Ω de part et d'autre de l'onde de pression étant la même, l'équation (1.3) chapitre 1 s'écrit [4, 8] :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V_s}{V_s} = 0 \quad (2.1)$$

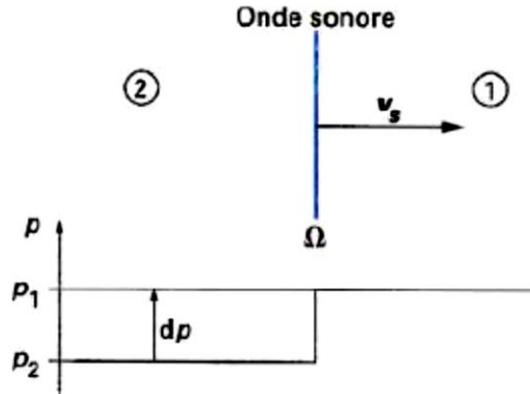


Fig. 2.1 - Propagation d'une onde sonore.

En admettant que la traversée de l'onde de pression se fasse de manière réversible, donc sans frottement compte tenu notamment de la valeur infiniment petite de l'épaisseur du front d'onde, l'équation (1.6) chapitre 1 devient, en négligeant la pesanteur ou en supposant que l'onde se déplace horizontalement [4] :

$$V_s dV_s + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.2)$$

La combinaison de ces deux équations [(1) V_s^2 - (2)] donne :

$$V_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (2.3)$$

Compte tenu que l'on a affaire à un phénomène local rapide, on peut admettre que ce phénomène est adiabatique. Avec l'hypothèse de réversibilité, il est donc isentropique. En admettant que le fluide considéré soit un gaz parfait idéal (*gaz parfait* pour lequel le coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, (rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants, est constant), l'équation de la transformation isentropique est :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = cst \quad (2.4)$$

Soit

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Dans ce cas, la vitesse du son a pour expression :

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (2.5)$$

Ou, en tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$V_s = \sqrt{\gamma r T} \quad (2.6)$$

Si le fluide n'est pas un gaz parfait, en considérant toujours la transformation isentropique, on peut écrire, d'une manière générale :

$$V_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Or, en notant que le coefficient isentropique vaut, par définition :

$$k_s = -\frac{v}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Où $v = \frac{1}{\rho}$ est le volume massique

On a
$$V_s^2 = k_s \frac{P}{\rho} \tag{2.7}$$

La vitesse du son peut être reliée au coefficient de compressibilité isentropique K_s du fluide :

$$K_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{P k_s} \tag{2.8}$$

Soit avec (2.7)
$$V_s^2 = \frac{1}{\rho K_s} = \frac{\bar{v}}{\bar{M}} \frac{1}{K_s}$$

Où \bar{v} et \bar{M} sont respectivement le volume molaire et la masse molaire du fluide.

La vitesse du son est donc d'autant plus faible que la compressibilité du fluide est plus grande.

2.1.2. Condition de stagnation

En supposant que le fluide compressible se décharge d'un réservoir de très grandes dimensions; les conditions dans cet état (générateur) seront appelées les conditions initiales, ce qui entraîne $V = V_0 \approx 0$ (avec les indices 0 ou *i* marquant les propriétés au réservoir), et si on considère un gaz parfait [9-14]: $C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$ et $C_p = cst$

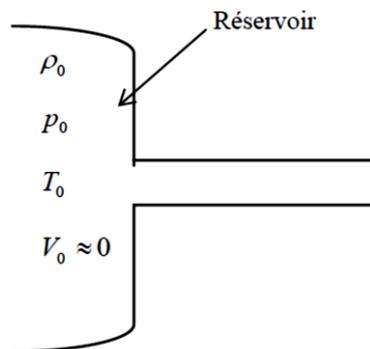


Fig. 2.2 - Conditions initiales.

On aura : $C_p T_i = C_p T_0 = C_p T + \frac{1}{2} V^2$

Sachant que : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $C_p - C_v = r \Rightarrow C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

Qui donne $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$

Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par :

$a^2 = \gamma R T = \gamma \frac{P}{\rho}$, on obtient :

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 \quad (2.9)$$

Où a_0 et a dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir) et statique.

En introduisant le nombre de Mach comme paramètre ($M = \frac{V}{a}$), l'équation (2.9) peut être

réécrite comme suit : $\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$

Et avec $a^2 = \gamma R T$ le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où : T_0 : la température totale

T : la température statique.

M : le nombre de Mach.

Si l'écoulement est isentropique $\frac{P}{\rho^\gamma} = cst$, on peut écrire :

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma - 1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où P_0 et ρ_0 dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

- En (1) $\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$

- En (2) $\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2$

$$\text{Donc : } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

Remarque :

Si $M = 1$ ($V = a$), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur : $\frac{T_0}{T_c} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}$

2.1.3. Différentes formes de l'équation d'énergie

2.1.3.1. Mouvement permanent d'un fluide compressible non visqueux

2.1.3.1.1. Equation de l'écoulement d'un fluide compressible non visqueux

L'équation générale de l'écoulement d'un fluide non visqueux s'écrit pour une unité de masse [15,16]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (2.10)$$

\vec{F} : force volumique, \vec{V} : vitesse, $\vec{\nabla} T = \overrightarrow{grad} T$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div} \vec{V}$,

$\nabla \nabla T = \nabla^2 T = \Delta T$ (la placcien)

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ dans un fluide compressible, \vec{F} (force active) due en générale à la pesanteur est négligeable par rapport à la force de pression l'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (2.11)$$

Multipliant scalairement par un déplacement $d\vec{s} = \vec{V} dt$ pris selon la trajectoire du fluide

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot d\vec{s} + d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{\rho} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} p = 0$$

$d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{V} dt (\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V}) = 0$ car le vecteur $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} \perp \vec{V} \cdot dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 \cdot d\vec{s} + \frac{1}{\rho} d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad (2.12)$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0$ on peut écrire cette équation sous la forme :

$$d \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{1}{\rho} dP = 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int \frac{dP}{\rho} = cst \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \quad (I)$$

a) Interprétation énergétique

Intégrant (2.13) entre deux points (1) et (2) d'un fluide

$$\int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = w_T|_1^2 \text{ travail de transvasement par kg de (1) à (2)}$$

Donc l'équation exprime la conservation de l'énergie mécanique pour l'un de masse de fluide, la diminution de l'énergie cinétique entre deux points du même filet fluide $\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right)$ est égale au travail de transvasement reçu par le fluide.

b) Cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \text{ Écoulement permanent compressible non visqueux.}$$

$$\frac{P}{\rho} = rT, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = cst, \quad P = A \cdot \rho^\gamma \Rightarrow dP = A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}V^2 + \int A\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = cst$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho^\gamma}{\rho} = cst \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = cst \quad (II)$$

Dite relation de Barré de Saint-Venant ou (B-S-V) que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} rT = cst$$

Et comme $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$ chaleur massique spécifique à pression constante.

En intégrant entre deux points 1 et 2 d'un écoulement on peut mettre la relation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\frac{P_2 \rho_1}{\rho_2 P_1} - 1 \right] \\ \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (III)$$

2.1.3.1.2. Equation générale d'écoulement adiabatique d'un fluide compressible visqueux

L'expression générale du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'unité de masse d'un écoulement est [4, 15,16] :

$$(Q_e)_1^2 = H_2 - H_1 + W_{V_2} - W_{V_1} + W_{z_2} - W_{z_1}$$

Q_e : chaleur échange avec l'extérieur.

H : enthalpie du fluide

W_V : Énergie cinétique du fluide

W_z : Énergie potentielle du fluide due à la pesanteur (négligeable).

Pour un écoulement adiabatique ($Q_e = 0$) cette équation devient :

$$H + \frac{V^2}{2} = cst$$

La somme $H + \frac{V^2}{2}$ est appelée énergie totale du fluide qui est constante dans un écoulement adiabatique. Elle pourra aussi s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.

a) Gaz parfait en écoulement adiabatique irréversible

Pour un gaz parfait $H = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} rT$ l'équation de l'écoulement adiabatique s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C^{st} , \quad C_p T + \frac{V^2}{2} = C^{st}$$

2.1.3.1.3. Equation générale pour l'écoulement non permanent d'un fluide compressible visqueux

L'équation vectorielle de l'écoulement est :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{f}_\eta \quad (V)$$

En multipliant scalairement par un élément de trajectoire $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{V} dt$, on obtient, en négligeant \overrightarrow{F} (due à la pesanteur) [5,15,16] :

$$\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} V^2 = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta$$

Le premier terme $\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) dt$ représente la variation d'énergie cinétique pendant le temps dt .

Le premier membre de l'équation de l'énergie devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left(\frac{V^2}{2} \right) = d \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad (a)$$

C'est-à-dire $d \left(\frac{V^2}{2} \right)$, différentielle totale de l'énergie cinétique par unité de masse.

- Nous poserons $\overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta = dW_f = -dQ_f$ (b) : représente le travail des forces de viscosité dans le déplacement ds toujours négatif. L'énergie correspondante apparaît sous forme d'une quantité de chaleur dQ_f .
- Pour le travail des forces de pression $-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P$, partant de

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt - \frac{dP}{\rho}$$

Compte tenu de l'expression différentielle de l'enthalpie

$$dH = TdS + v dP = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

$$\text{On obtient ensuite : } -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH \quad (c)$$

En remplaçant (a), (b) et (c) dans (V) on obtient :

$$d \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH - dQ_f$$

Mais d'après la définition de l'entropie $dS = \frac{dQ_c + dQ_f}{T}$

$$dQ_c = TdS - dQ_f$$

On obtient donc finalement :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + d \left(H + \frac{V^2}{2} \right) = dQ_c \quad (VII)$$

On vérifie immédiatement que pour un écoulement permanent ($\frac{\partial P}{\partial t} = 0$) et adiabatique ($dQ_c = 0$) on retrouve l'équation $H + \frac{V^2}{2} = C^{st}$

2.1.4. Ecoulement stationnaire isentropique à travers une conduite à section variable

L'écoulement est approximativement unidimensionnel (figure 2.3) avec $V \approx V(x)$, ce qui simplifie la théorie [5,15,16].

Pour l'écoulement unidimensionnel stationnaire, l'équation de continuité informe que le débit massique soit constant : $\dot{m} = \rho VA = C^{st}$

En différentiant logarithmiquement, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} + \frac{\partial A}{A} = 0 \quad (2.14)$$

L'équation d'Euler décrivant le mouvement stationnaire le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\ell} + \frac{d}{d\ell} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = 0 \quad \text{où : } \ell \text{ est l'abscisse curviligne.}$$

Ou bien :

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0 \quad (2.15)$$

La vitesse du son est $a^2 = \frac{dP}{d\rho}$ d'où $dP = a^2 d\rho$

En éliminant dP dans l'équation (2.15), on obtient : $\frac{a^2 d\rho}{\rho} + V dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V dV}{a^2}$

Puisque $M^2 = \frac{V^2}{a^2}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.16)$$

Si on substitue $\frac{d\rho}{\rho}$ dans l'équation (2.14), on aura :

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{1}{(M^2-1)} \frac{\partial A}{A} \quad (2.17)$$

Qui est la première équation de la théorie d'Hugoniot donnant la relation entre le changement de la section d'une canalisation et la vitesse de l'écoulement compressible.

Aussi on a d'après l'équation (2.15) :

$$\frac{\partial V}{V} = -\frac{1}{M^2 a^2} \frac{\partial \rho}{\rho}$$

et puisque $a^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

$$\frac{\partial V}{V} = - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{P} \quad (2.18)$$

Qui représente la deuxième équation d'Hugoniot.

L'inspection de ces deux équations (2.18) et (2.17) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme $M^2 - 1$. Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si $M = 1$; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation 2. 17), donc $dA = 0$, qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure 2-3), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).
2. Si $M < 1$; écoulement subsonique, quand la section A augmente la vitesse V diminue et vice-versa.
3. Si $M > 1$; écoulement supersonique, toute augmentation de la section A implique une augmentation de la vitesse V et vice-versa.

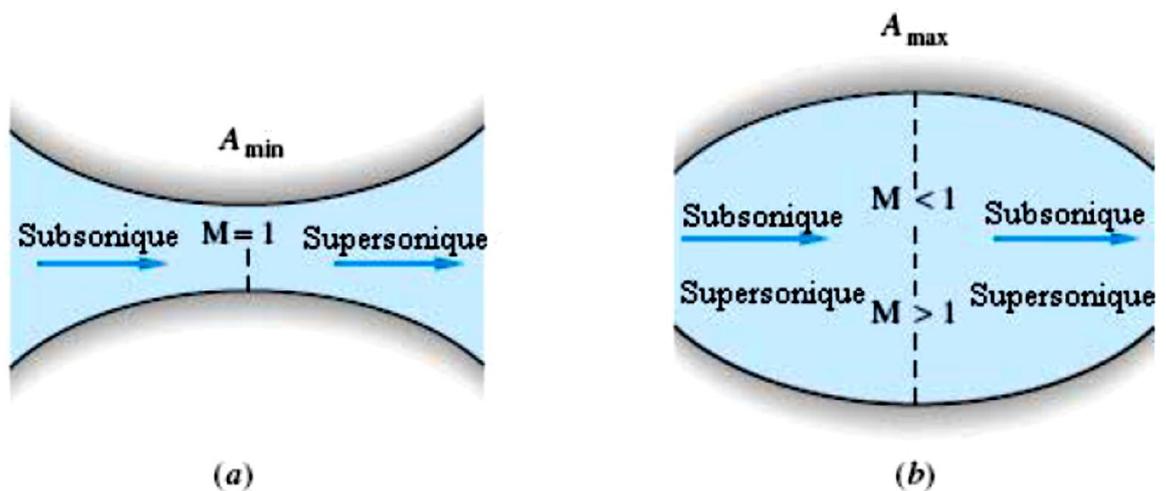
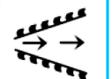
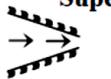


Fig. 2.3 - Ecoulement compressible dans une canalisation de section variable :
 (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique;
 (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

4. Ainsi d'après l'équation (2.18), toute variation de la vitesse V entraîne une variation de la pression P dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

Écoulement				
Propriétés	Subsonique		Supersonique	
				
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

2.1.4.1. Débit massique d'une canalisation de section variable

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique \dot{m} en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation [4,5]: $\dot{m} = \rho VA$

Substituons V par son expression d'après l'équation de Saint-Venant :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique : $\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma} = c^{st} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \quad \dot{m} &= \rho_0 A \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \\ &\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \\ &\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.5 Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (2.5a). Si la pression en aval P_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister [4,5].

- ❖ Pour les cas A et B (figure 2-5b), la pression P_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers

l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $P_e = P_b$ et le jet est subsonique.

- ❖ Pour le cas C, le rapport des sections $\frac{A_e}{A_{col}}$ est exactement égal à $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 2-5c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $P_e = P_b$.

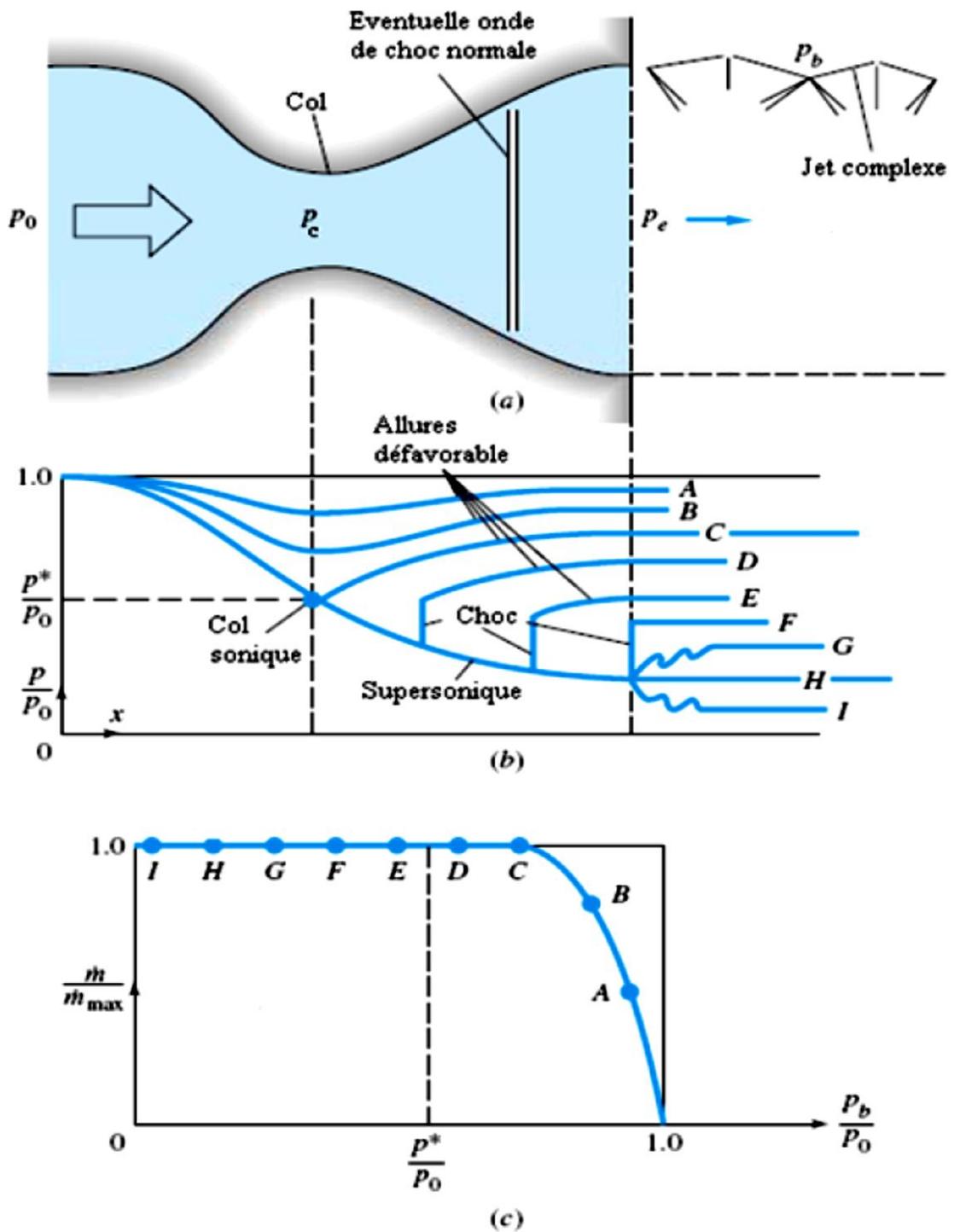


Fig. 2.5 - Tuyère convergente-divergente :

(a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles;

(b) distribution des pressions causée par divers pressions aval P_b ;

(c) débit massique [5].

- ❖ Supposons dans ce cas que P_b se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions P_b des cas D à F ont lieu (figure 2-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 2-5c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression P_b .
- ❖ Finalement dans le cas I, P_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

2.3. Ecoulement de Fanno

Cet écoulement adiabatique qui ne respecte pas l'évolution de la section S d'un écoulement isentropique, est essentiellement irréversible. Il est extrêmement fréquent en pratique et est appelé écoulement de Fanno [4]

2.3.1. Ecoulement compressible dans les conduites avec friction (Théorie de FANNO)

Le chapitre (II) a montré l'effet de changement de section sur un écoulement compressible en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Nous pourrions maintenant ajouter la friction et le transfert de chaleur au changement de section et considérer les effets couplés, qui sont faits dans des textes avancés. Au lieu de cela, comme une introduction élémentaire, cette section traite seulement l'effet de la friction, en négligeant le changement de section et le transfert de chaleur. Les suppositions de base sont :

1. Ecoulement unidimensionnel, stationnaire et adiabatique
2. Gaz parfait avec des chaleurs spécifiques constantes
3. Conduite à section droite constante
4. Travail mécanique et changements d'énergie potentielle négligeables
5. Contrainte de cisaillement pariétale corrélée par un facteur de friction de Darcy En effet, nous étudions un problème de friction des tuyauteries de type Moody, mais avec de grands changements de l'énergie cinétique, l'enthalpie et la pression dans le courant fluide.

Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section A et la longueur dx dans la figure (5-1). La section est constante, mais d'autres propriétés de flux (P, ρ, T, h, V) peuvent varier avec x .

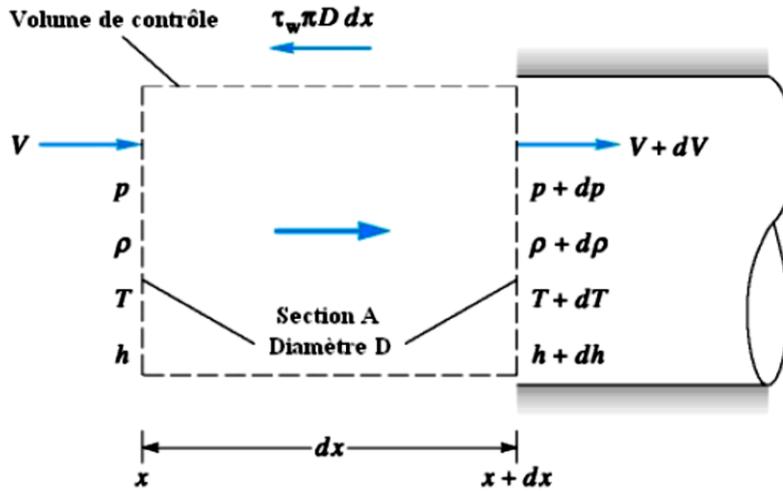


Fig. 2.6 - Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

2.3.2. Équations de l'écoulement de Fanno

Les équations générales, appliquées à ce cas particulier, s'écrivent comme suit.

❖ Continuité :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{M}}{A} = \dot{m} = C^{st} \tag{2.20}$$

Où \dot{m} est le débit-masse par unité de surface encore appelé vitesse massique ou densité de flux massique. C 'est une constante puisque $\dot{M}_1 = \dot{M}_2$ et $A_1 = A_2$. Cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} = 0 \tag{2.21}$$

❖ Bilan de quantité de mouvement

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = -fdA \tag{2.22}$$

❖ Bilan de l'énergie

$$dh + VdV = 0 \tag{2.23}$$

❖ Équations d'état du fluide

$$dh = C_p dT, \quad h = C_p T + C^{st} \quad (2.24)$$

$$\frac{P}{\rho} = rT \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (2.25)$$

2.3.3. Évolution du fluide en diagramme entropique

L'expression de la variation d'entropie d'un gaz parfait idéal est donnée par

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1} \quad (2.26)$$

L'indice 1 est relatif à une section de référence amont. En combinant les équations d'état (2.25) et (2.26), l'équation (2.24) et l'équation de continuité (2.20), on peut écrire successivement :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\rho T}{\rho_1 T_1} = \frac{V_1}{V} \frac{T}{T_1} \quad (2.27)$$

$$\frac{V^2 - V_1^2}{2} = h_1 - h = C_p (T_1 - T)$$

Soit :

$$\frac{V}{V_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{V_1^2} (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

Ou encore, en notant que : $V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1}$

$$\frac{V}{V_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

En combinant les équations (2.27), (2.28), (2.29) et la relation de Mayer pour les gaz parfaits, on obtient :

$$s - s_1 = C_v \ln \frac{T}{T_1} + \frac{r}{2} \ln \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right] \quad (2.30)$$

C'est l'équation de la courbe $s(T)$ à conditions amont données T_1 et P_1 (ou T_1 et ρ_1) pour une valeur \dot{m} de la vitesse massique. La figure 5-2 représente de telles courbes caractérisant l'évolution du fluide en écoulement de Fanno pour diverses valeurs de la densité de flux massique et une température génératrice $T_0 = T_{01}$ donnée.

Outre cette température génératrice, constante pour tout l'écoulement, ont été portées, sur cette figure, l'enthalpie génératrice de tout l'écoulement $h_{01} = h_0$ et la pression génératrice P_{01} du point 1. On rappelle que, l'écoulement étant irréversible, les pressions génératrices des divers points de l'écoulement évoluent avec le point considéré.

La famille de courbes de la figure 5-2 peut être tracée à partir des considérations suivantes. La température génératrice étant fixée, il existe un lien entre la température et la pression de référence 1 pour chaque valeur de la vitesse massique \dot{m} . Cette relation s'obtient en combinant les équations d'un écoulement monodimensionnel, l'équation d'état (2.27) et l'équation de conservation de la masse (2.20) :

$$T_0 = T_1 + \frac{r^2}{2c_p} \frac{\dot{m}^2}{P_1^2} T_1^2$$

$$T_1 = \frac{c_p}{r^2} \frac{P_1^2}{\dot{m}^2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{r^2 \dot{m}^2}{c_p P_1^2} T_0} - 1 \right) \quad (2.31)$$

C'est cette température qui doit être introduite dans la relation (2.30), en prenant soin, pour tout changement de \dot{m} , de prendre une nouvelle valeur de s_1 correspondant, à la pression de référence P_1 (dont la valeur, au départ du tracé n'a aucune importance, mais qui sera ensuite conservée constante pour l'ensemble du tracé) et à la nouvelle température T_1 .

Notons enfin que, selon la relation (2.31), à T_1 constante, si P_1 augmente, \dot{m} doit augmenter. Ainsi, les courbes à forte valeur de \dot{m} sont situées dans la partie gauche du diagramme.

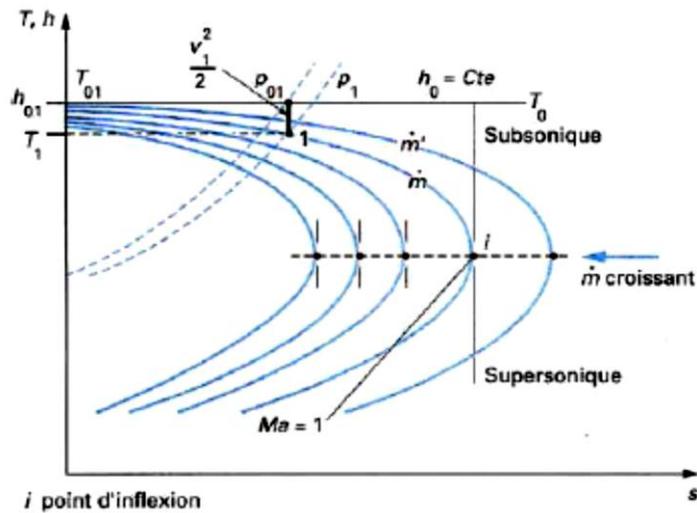


Fig. 2.7 - Évolution du fluide en écoulement de Fanno pour une température génératrice donnée.

TABLE I : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Fanno).

M	$\bar{f}L^* / D$	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	p_0 / p_0^*
0.00	∞	∞	1.2000	∞	∞
0.02	1778.4500	54.7701	1.1999	45.6454	28.9421
0.04	440.3523	27.3817	1.1996	22.8254	14.4815
0.06	193.0311	18.2509	1.1991	15.2200	9.6659
0.08	106.7182	13.6843	1.1985	11.4182	7.2616
0.10	66.9216	10.9435	1.1976	9.1378	5.8218
0.12	45.4080	9.1156	1.1966	7.6182	4.8643
0.14	32.5113	7.8093	1.1953	6.5333	4.1824
0.16	24.1978	6.8291	1.1939	5.7200	3.6727
0.18	18.5427	6.0662	1.1923	5.0879	3.2779
0.20	14.5333	5.4554	1.1905	4.5826	2.9635
0.22	11.5961	4.9554	1.1885	4.1694	2.7076
0.24	9.3865	4.5383	1.1863	3.8255	2.4956
0.26	7.6876	4.1851	1.1840	3.5347	2.3173
0.28	6.3572	3.8820	1.1815	3.2857	2.1656
0.30	5.2993	3.6191	1.1788	3.0702	2.0351
0.32	4.4467	3.3887	1.1759	2.8818	1.9219
0.34	3.7520	3.1853	1.1729	2.7158	1.8229
0.36	3.1801	3.0042	1.1697	2.5684	1.7358
0.38	2.7054	2.8420	1.1663	2.4367	1.6587
0.40	2.3085	2.6958	1.1628	2.3184	1.5901
0.42	1.9744	2.5634	1.1591	2.2115	1.5289
0.44	1.6915	2.4428	1.1553	2.1145	1.4740
0.46	1.4509	2.3326	1.1513	2.0261	1.4246
0.48	1.2453	2.2313	1.1471	1.9451	1.3801
0.50	1.0691	2.1381	1.1429	1.8708	1.3398
0.52	0.9174	2.0519	1.1384	1.8024	1.3034
0.54	0.7866	1.9719	1.1339	1.7391	1.2703
0.56	0.6736	1.8975	1.1292	1.6805	1.2403
0.58	0.5757	1.8282	1.1244	1.6260	1.2130
0.60	0.4908	1.7634	1.1194	1.5753	1.1882
0.62	0.4172	1.7026	1.1143	1.5279	1.1656
0.64	0.3533	1.6456	1.1091	1.4836	1.1451
0.66	0.2979	1.5919	1.1038	1.4421	1.1265
0.68	0.2498	1.5413	1.0984	1.4032	1.1097
0.70	0.2081	1.4935	1.0929	1.3665	1.0944
0.72	0.1721	1.4482	1.0873	1.3320	1.0806
0.74	0.1411	1.4054	1.0815	1.2994	1.0681
0.76	0.1145	1.3647	1.0757	1.2686	1.0570
0.78	0.0917	1.3261	1.0698	1.2395	1.0471
0.80	0.0723	1.2893	1.0638	1.2119	1.0382
0.82	0.0559	1.2542	1.0578	1.1858	1.0305
0.84	0.0423	1.2208	1.0516	1.1609	1.0237
0.86	0.0310	1.1889	1.0454	1.1373	1.0179

TABLE I (Suite) : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
0.88	0.0218	1.1583	1.0391	1.1148	1.0129
0.90	0.0145	1.1291	1.0327	1.0934	1.0089
0.92	0.0089	1.1011	1.0263	1.0730	1.0056
0.94	0.0048	1.0743	1.0198	1.0535	1.0031
0.96	0.0021	1.0485	1.0132	1.0348	1.0014
0.98	0.0005	1.0238	1.0066	1.0170	1.0003
1.00	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.0005	0.9771	0.9933	0.9837	1.0003
1.04	0.0018	0.9551	0.9866	0.9681	1.0013
1.06	0.0038	0.9338	0.9798	0.9531	1.0029
1.08	0.0066	0.9133	0.9730	0.9387	1.0051
1.10	0.0099	0.8936	0.9662	0.9249	1.0079
1.12	0.0138	0.8745	0.9593	0.9116	1.0113
1.14	0.0182	0.8561	0.9524	0.8988	1.0153
1.16	0.0230	0.8383	0.9455	0.8865	1.0198
1.18	0.0281	0.8210	0.9386	0.8747	1.0248
1.20	0.0336	0.8044	0.9317	0.8633	1.0304
1.22	0.0394	0.7882	0.9247	0.8524	1.0366
1.24	0.0455	0.7726	0.9178	0.8418	1.0432
1.26	0.0517	0.7574	0.9108	0.8316	1.0504
1.28	0.0582	0.7427	0.9038	0.8218	1.0581
1.30	0.0648	0.7285	0.8969	0.8123	1.0663
1.32	0.0716	0.7147	0.8899	0.8031	1.0750
1.34	0.0785	0.7012	0.8829	0.7942	1.0842
1.36	0.0855	0.6882	0.8760	0.7856	1.0940
1.38	0.0926	0.6755	0.8690	0.7773	1.1042
1.40	0.0997	0.6632	0.8621	0.7693	1.1149
1.42	0.1069	0.6512	0.8551	0.7615	1.1262
1.44	0.1142	0.6396	0.8482	0.7540	1.1379
1.46	0.1215	0.6282	0.8413	0.7467	1.1501
1.48	0.1288	0.6172	0.8344	0.7397	1.1629
1.50	0.1360	0.6065	0.8276	0.7328	1.1762
1.52	0.1433	0.5960	0.8207	0.7262	1.1899
1.54	0.1506	0.5858	0.8139	0.7198	1.2042
1.56	0.1579	0.5759	0.8071	0.7135	1.2190
1.58	0.1651	0.5662	0.8004	0.7074	1.2344
1.60	0.1724	0.5568	0.7937	0.7016	1.2502
1.62	0.1795	0.5476	0.7869	0.6958	1.2666
1.64	0.1867	0.5386	0.7803	0.6903	1.2836
1.66	0.1938	0.5299	0.7736	0.6849	1.3010
1.68	0.2008	0.5213	0.7670	0.6796	1.3190
1.70	0.2078	0.5130	0.7605	0.6745	1.3376
1.72	0.2147	0.5048	0.7539	0.6696	1.3567
1.74	0.2216	0.4969	0.7474	0.6648	1.3764
1.76	0.2284	0.4891	0.7410	0.6601	1.3967
1.78	0.2352	0.4815	0.7345	0.6555	1.4175
1.80	0.2419	0.4741	0.7282	0.6511	1.4390
1.82	0.2485	0.4668	0.7218	0.6467	1.4610
1.84	0.2551	0.4597	0.7155	0.6425	1.4836
1.86	0.2616	0.4528	0.7093	0.6384	1.5069
1.88	0.2680	0.4460	0.7030	0.6344	1.5308
1.90	0.2743	0.4394	0.6969	0.6305	1.5553
1.92	0.2806	0.4329	0.6907	0.6267	1.5804

TABLE I (Suite): Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
1.94	0.2868	0.4265	0.6847	0.6230	1.6062
1.96	0.2929	0.4203	0.6786	0.6193	1.6326
1.98	0.2990	0.4142	0.6726	0.6158	1.6597
2.00	0.3050	0.4082	0.6667	0.6124	1.6875
2.02	0.3109	0.4024	0.6608	0.6090	1.7160
2.04	0.3168	0.3967	0.6549	0.6057	1.7451
2.06	0.3225	0.3911	0.6491	0.6025	1.7750
2.08	0.3282	0.3856	0.6433	0.5994	1.8056
2.10	0.3339	0.3802	0.6376	0.5963	1.8369
2.12	0.3394	0.3750	0.6320	0.5934	1.8690
2.14	0.3449	0.3698	0.6263	0.5905	1.9018
2.16	0.3503	0.3648	0.6208	0.5876	1.9354
2.18	0.3556	0.3598	0.6152	0.5848	1.9698
2.20	0.3609	0.3549	0.6098	0.5821	2.0050
2.22	0.3661	0.3502	0.6043	0.5794	2.0409
2.24	0.3712	0.3455	0.5989	0.5768	2.0777
2.26	0.3763	0.3409	0.5936	0.5743	2.1153
2.28	0.3813	0.3364	0.5883	0.5718	2.1538
2.30	0.3862	0.3320	0.5831	0.5694	2.1931
2.32	0.3911	0.3277	0.5779	0.5670	2.2333
2.34	0.3959	0.3234	0.5728	0.5647	2.2744
2.36	0.4006	0.3193	0.5677	0.5624	2.3164
2.38	0.4053	0.3152	0.5626	0.5602	2.3593
2.40	0.4099	0.3111	0.5576	0.5580	2.4031
2.42	0.4144	0.3072	0.5527	0.5558	2.4479
2.44	0.4189	0.3033	0.5478	0.5537	2.4936
2.46	0.4233	0.2995	0.5429	0.5517	2.5403
2.48	0.4277	0.2958	0.5381	0.5497	2.5880
2.50	0.4320	0.2921	0.5333	0.5477	2.6367
2.52	0.4362	0.2885	0.5286	0.5458	2.6864
2.54	0.4404	0.2850	0.5239	0.5439	2.7372
2.56	0.4445	0.2815	0.5193	0.5421	2.7891
2.58	0.4486	0.2781	0.5147	0.5402	2.8420
2.60	0.4526	0.2747	0.5102	0.5385	2.8960
2.62	0.4565	0.2714	0.5057	0.5367	2.9511
2.64	0.4604	0.2682	0.5013	0.5350	3.0073
2.66	0.4643	0.2650	0.4969	0.5333	3.0647
2.68	0.4681	0.2619	0.4925	0.5317	3.1233
2.70	0.4718	0.2588	0.4882	0.5301	3.1830
2.72	0.4755	0.2558	0.4839	0.5285	3.2439
2.74	0.4791	0.2528	0.4797	0.5269	3.3061
2.76	0.4827	0.2498	0.4755	0.5254	3.3695
2.78	0.4863	0.2470	0.4714	0.5239	3.4342
2.80	0.4898	0.2441	0.4673	0.5225	3.5001
2.82	0.4932	0.2414	0.4632	0.5210	3.5674
2.84	0.4966	0.2386	0.4592	0.5196	3.6359
2.86	0.5000	0.2359	0.4552	0.5182	3.7058
2.88	0.5033	0.2333	0.4513	0.5169	3.7771
2.90	0.5065	0.2307	0.4474	0.5155	3.8498
2.92	0.5097	0.2281	0.4436	0.5142	3.9238
2.94	0.5129	0.2256	0.4398	0.5129	3.9993
2.96	0.5160	0.2231	0.4360	0.5116	4.0762
2.98	0.5191	0.2206	0.4323	0.5104	4.1547

TABLE I (Suite): Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Fanno)

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	P_0/P_0^*
3.00	0.5222	0.2182	0.4286	0.5092	4.2346
3.02	0.5252	0.2158	0.4249	0.5080	4.3160
3.04	0.5281	0.2135	0.4213	0.5068	4.3989
3.06	0.5310	0.2112	0.4177	0.5056	4.4835
3.08	0.5339	0.2090	0.4142	0.5045	4.5696
3.10	0.5368	0.2067	0.4107	0.5034	4.6573
3.12	0.5396	0.2045	0.4072	0.5023	4.7467
3.14	0.5424	0.2024	0.4038	0.5012	4.8377
3.16	0.5451	0.2002	0.4004	0.5001	4.9304
3.18	0.5478	0.1981	0.3970	0.4991	5.0248
3.20	0.5504	0.1961	0.3937	0.4980	5.1209
3.22	0.5531	0.1940	0.3904	0.4970	5.2189
3.24	0.5557	0.1920	0.3872	0.4960	5.3186
3.26	0.5582	0.1901	0.3839	0.4951	5.4201
3.28	0.5607	0.1881	0.3807	0.4941	5.5234
3.30	0.5632	0.1862	0.3776	0.4931	5.6286
3.32	0.5657	0.1843	0.3745	0.4922	5.7357
3.34	0.5681	0.1825	0.3714	0.4913	5.8448
3.36	0.5705	0.1806	0.3683	0.4904	5.9558
3.38	0.5729	0.1788	0.3653	0.4895	6.0687
3.40	0.5752	0.1770	0.3623	0.4886	6.1837
3.42	0.5775	0.1753	0.3594	0.4878	6.3007
3.44	0.5798	0.1736	0.3564	0.4869	6.4197
3.46	0.5820	0.1718	0.3535	0.4861	6.5409
3.48	0.5842	0.1702	0.3507	0.4853	6.6642
3.50	0.5864	0.1685	0.3478	0.4845	6.7896
3.52	0.5886	0.1669	0.3450	0.4837	6.9172
3.54	0.5907	0.1653	0.3422	0.4829	7.0470
3.56	0.5928	0.1637	0.3395	0.4821	7.1791
3.58	0.5949	0.1621	0.3368	0.4813	7.3134
3.60	0.5970	0.1606	0.3341	0.4806	7.4501
3.62	0.5990	0.1590	0.3314	0.4799	7.5891
3.64	0.6010	0.1575	0.3288	0.4791	7.7304
3.66	0.6030	0.1560	0.3262	0.4784	7.8742
3.68	0.6049	0.1546	0.3236	0.4777	8.0204
3.70	0.6068	0.1531	0.3210	0.4770	8.1690
3.72	0.6087	0.1517	0.3185	0.4763	8.3202
3.74	0.6106	0.1503	0.3160	0.4757	8.4739
3.76	0.6125	0.1489	0.3135	0.4750	8.6302
3.78	0.6143	0.1475	0.3111	0.4743	8.7891
3.80	0.6161	0.1462	0.3086	0.4737	8.9506
3.82	0.6179	0.1449	0.3062	0.4730	9.1147
3.84	0.6197	0.1436	0.3039	0.4724	9.2816
3.86	0.6214	0.1423	0.3015	0.4718	9.4513
3.88	0.6231	0.1410	0.2992	0.4712	9.6237
3.90	0.6248	0.1397	0.2969	0.4706	9.7989
3.92	0.6265	0.1385	0.2946	0.4700	9.9770
3.94	0.6282	0.1372	0.2923	0.4694	10.1580
3.96	0.6298	0.1360	0.2901	0.4688	10.3419
3.98	0.6315	0.1348	0.2879	0.4683	10.5288
4.00	0.6331	0.1336	0.2857	0.4677	10.7187
∞	0.8215	0	0	0.4082	∞

2.4. Écoulement de Rayleigh

Cet écoulement, appelé écoulement de Rayleigh, qui a lieu à $A = C^{te}$ en respectant la réversibilité, ne peut se développer qu'avec un échange thermique q contrôlé. Cette nécessité le rend peu fréquent en pratique [4].

2.4.1. Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH)

L'addition ou l'enlèvement de chaleur ont un effet intéressant sur un écoulement compressible. Ici nous limitons l'analyse pour l'écoulement avec transfert de chaleur sans friction dans un conduit de section constante.

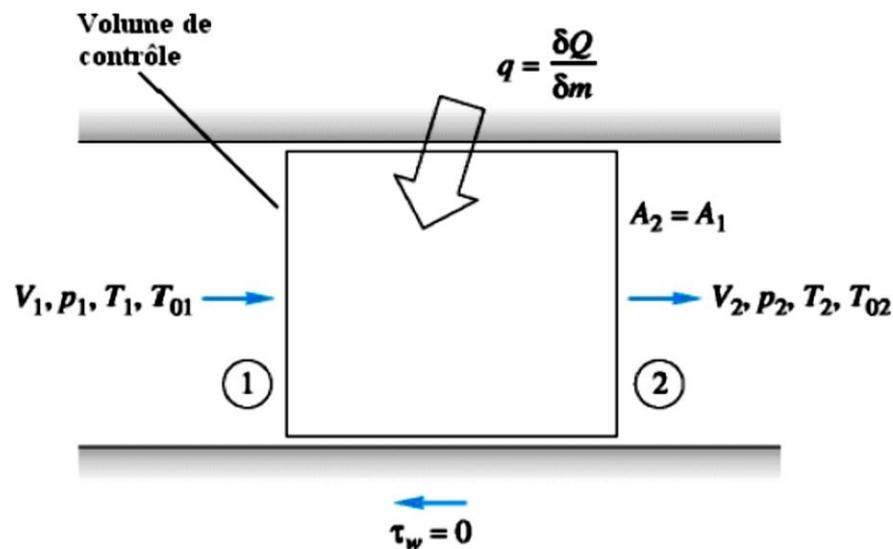


Fig. 2.8 - Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur.

Considérez le volume de contrôle élémentaire de la conduite dans la figure 2.8. Entre des sections 1 et 2 une quantité de chaleur δQ est ajoutée (ou enlevée) à chaque masse élémentaire δm passant. Sans friction ou changement de section,

2.4.2. Équations de l'écoulement de Rayleigh

Les équations générales appliquées à ce cas particulier s'écrivent :

— continuité

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \dot{m} = C^{st} \quad (2.32)$$

Ou encore :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.32a)$$

— bilan de la quantité de mouvement :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.33)$$

— bilan de l'énergie :

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta E_{c12} \quad (2.43)$$

Ou :

$$\delta q = dh + VdV \quad (2.35)$$

— équation d'état du fluide :

$$dh = C_p dT \quad (2.36)$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (2.37)$$

2.4.3. Évolution du fluide en diagramme entropique

La variation d'entropie d'un gaz parfait idéal s'écrit :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1} \quad (2.38)$$

Où la référence 1 concerne l'état du fluide dans la section 1 de référence.

Dans cette expression, pour exprimer le rapport de pression $\frac{P}{P_1}$ en fonction de \dot{m} , de T_1 , de P_1 et de T , on combine les relations (2.33) et (2.31a), ce qui donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho V^2} = 0 \quad (2.39)$$

Soit, avec l'équation (2.32) : $\dot{m}^2 \frac{d\rho}{\rho^2} - dP = 0$

L'intégration de cette relation donne :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = C^{st} \quad (2.40)$$

Ou :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = P_1 + \frac{\dot{m}^2}{\rho_1} \quad (2.41)$$

En utilisant l'équation d'état, on obtient : $P + \frac{\dot{m}^2 r T}{P} = P_1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1}$

Soit : $\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 - \frac{P}{P_1} \left(1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}\right) + \frac{\dot{m}^2 r T}{P_1^2} = 0$

Ainsi, le rapport $\frac{P}{P_1}$ est donné par la relation :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \frac{m^2 r T_1}{P_1^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m^2 r T_1}{P_1^2}\right)^2 - 4 \frac{m^2 r T}{P_1^2}}}{2} \quad (2.42)$$

En posant $\alpha = \frac{m^2 r T_1}{P_1^2}$, l'équation de l'écoulement est :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} + r \ln 2 - r \ln \left[1 + \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4 \alpha \frac{T}{T_1}} \right] \quad (2.43)$$

La courbe correspondante est représentée par l'évolution des caractéristiques thermodynamiques du fluide lors d'un écoulement de Rayleigh pour une valeur de α .

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
0.00	0.0000	2.4000	0.0000	∞	1.2679
0.02	0.0019	2.3987	0.0023	1042.2500	1.2675
0.04	0.0076	2.3946	0.0092	261.0000	1.2665
0.06	0.0171	2.3880	0.0205	116.3241	1.2647
0.08	0.0302	2.3787	0.0362	65.6875	1.2623
0.10	0.0468	2.3669	0.0560	42.2500	1.2591
0.12	0.0666	2.3526	0.0797	29.5185	1.2554
0.14	0.0895	2.3359	0.1069	21.8418	1.2510
0.16	0.1151	2.3170	0.1374	16.8594	1.2461
0.18	0.1432	2.2959	0.1708	13.4434	1.2406
0.20	0.1736	2.2727	0.2066	11.0000	1.2346
0.22	0.2057	2.2477	0.2445	9.1922	1.2281
0.24	0.2395	2.2209	0.2841	7.8171	1.2213
0.26	0.2745	2.1925	0.3250	6.7470	1.2140
0.28	0.3104	2.1626	0.3667	5.8980	1.2064
0.30	0.3469	2.1314	0.4089	5.2130	1.1985
0.32	0.3837	2.0991	0.4512	4.6523	1.1904
0.34	0.4206	2.0657	0.4933	4.1877	1.1822
0.36	0.4572	2.0314	0.5348	3.7984	1.1737
0.38	0.4935	1.9964	0.5755	3.4688	1.1652
0.40	0.5290	1.9608	0.6151	3.1875	1.1566
0.42	0.5638	1.9247	0.6535	2.9454	1.1480
0.44	0.5975	1.8882	0.6903	2.7355	1.1394
0.46	0.6301	1.8515	0.7254	2.5525	1.1308
0.48	0.6614	1.8147	0.7587	2.3918	1.1224
0.50	0.6914	1.7778	0.7901	2.2500	1.1141
0.52	0.7199	1.7409	0.8196	2.1243	1.1059
0.54	0.7470	1.7043	0.8469	2.0122	1.0979
0.56	0.7725	1.6678	0.8723	1.9120	1.0901
0.58	0.7965	1.6316	0.8955	1.8219	1.0826
0.60	0.8189	1.5957	0.9167	1.7407	1.0753
0.62	0.8398	1.5603	0.9358	1.6673	1.0682
0.64	0.8592	1.5253	0.9530	1.6006	1.0615
0.66	0.8771	1.4908	0.9682	1.5399	1.0550
0.68	0.8935	1.4569	0.9814	1.4844	1.0489
0.70	0.9085	1.4235	0.9929	1.4337	1.0431
0.72	0.9221	1.3907	1.0026	1.3871	1.0376
0.74	0.9344	1.3585	1.0106	1.3442	1.0325
0.76	0.9455	1.3270	1.0171	1.3047	1.0278
0.78	0.9553	1.2961	1.0220	1.2682	1.0234
0.80	0.9639	1.2658	1.0255	1.2344	1.0193
0.82	0.9715	1.2362	1.0276	1.2030	1.0157
0.84	0.9781	1.2073	1.0285	1.1738	1.0124

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0 / T_0^*	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	p_0 / p_0^*
0.86	0.9836	1.1791	1.0283	1.1467	1.0095
0.88	0.9883	1.1515	1.0269	1.1214	1.0070
0.90	0.9921	1.1246	1.0245	1.0977	1.0049
0.92	0.9951	1.0984	1.0212	1.0756	1.0031
0.94	0.9973	1.0728	1.0170	1.0549	1.0017
0.96	0.9988	1.0479	1.0121	1.0354	1.0008
0.98	0.9997	1.0236	1.0064	1.0172	1.0002
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9997	0.9770	0.9930	0.9838	1.0002
1.04	0.9989	0.9546	0.9855	0.9686	1.0008
1.06	0.9977	0.9327	0.9776	0.9542	1.0017
1.08	0.9960	0.9115	0.9691	0.9406	1.0031
1.10	0.9939	0.8909	0.9603	0.9277	1.0049
1.12	0.9915	0.8708	0.9512	0.9155	1.0070
1.14	0.9887	0.8512	0.9417	0.9039	1.0095
1.16	0.9856	0.8322	0.9320	0.8930	1.0124
1.18	0.9823	0.8137	0.9220	0.8826	1.0157
1.20	0.9787	0.7958	0.9118	0.8727	1.0194
1.22	0.9749	0.7783	0.9015	0.8633	1.0235
1.24	0.9709	0.7613	0.8911	0.8543	1.0279
1.26	0.9668	0.7447	0.8805	0.8458	1.0328
1.28	0.9624	0.7287	0.8699	0.8376	1.0380
1.30	0.9580	0.7130	0.8592	0.8299	1.0437
1.32	0.9534	0.6978	0.8484	0.8225	1.0497
1.34	0.9487	0.6830	0.8377	0.8154	1.0561
1.36	0.9440	0.6686	0.8269	0.8086	1.0629
1.38	0.9391	0.6546	0.8161	0.8021	1.0701
1.40	0.9343	0.6410	0.8054	0.7959	1.0777
1.42	0.9293	0.6278	0.7947	0.7900	1.0856
1.44	0.9243	0.6149	0.7840	0.7843	1.0940
1.46	0.9193	0.6024	0.7735	0.7788	1.1028
1.48	0.9143	0.5902	0.7629	0.7736	1.1120
1.50	0.9093	0.5783	0.7525	0.7685	1.1215
1.52	0.9042	0.5668	0.7422	0.7637	1.1315
1.54	0.8992	0.5555	0.7319	0.7590	1.1419
1.56	0.8942	0.5446	0.7217	0.7545	1.1527
1.58	0.8892	0.5339	0.7117	0.7502	1.1640
1.60	0.8842	0.5236	0.7017	0.7461	1.1756
1.62	0.8792	0.5135	0.6919	0.7421	1.1877
1.64	0.8743	0.5036	0.6822	0.7383	1.2002
1.66	0.8694	0.4940	0.6726	0.7345	1.2131
1.68	0.8645	0.4847	0.6631	0.7310	1.2264
1.70	0.8597	0.4756	0.6538	0.7275	1.2402
1.72	0.8549	0.4668	0.6445	0.7242	1.2545
1.74	0.8502	0.4581	0.6355	0.7210	1.2692
1.76	0.8455	0.4497	0.6265	0.7178	1.2843
1.78	0.8409	0.4415	0.6176	0.7148	1.2999
1.80	0.8363	0.4335	0.6089	0.7119	1.3159
1.82	0.8317	0.4257	0.6004	0.7091	1.3324
1.84	0.8273	0.4181	0.5919	0.7064	1.3494
1.86	0.8228	0.4107	0.5836	0.7038	1.3669
1.88	0.8185	0.4035	0.5754	0.7012	1.3849
1.90	0.8141	0.3964	0.5673	0.6988	1.4033

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0 / T_0^*	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	P_0 / P_0^*
1.92	0.8099	0.3896	0.5594	0.6964	1.4222
1.94	0.8057	0.3828	0.5516	0.6940	1.4417
1.96	0.8015	0.3763	0.5439	0.6918	1.4616
1.98	0.7974	0.3699	0.5364	0.6896	1.4821
2.00	0.7934	0.3636	0.5289	0.6875	1.5031
2.02	0.7894	0.3575	0.5216	0.6854	1.5246
2.04	0.7855	0.3516	0.5144	0.6835	1.5467
2.06	0.7816	0.3458	0.5074	0.6815	1.5693
2.08	0.7778	0.3401	0.5004	0.6796	1.5924
2.10	0.7741	0.3345	0.4936	0.6778	1.6162
2.12	0.7704	0.3291	0.4868	0.6760	1.6404
2.14	0.7667	0.3238	0.4802	0.6743	1.6653
2.16	0.7631	0.3186	0.4737	0.6726	1.6908
2.18	0.7596	0.3136	0.4673	0.6710	1.7168
2.20	0.7561	0.3086	0.4611	0.6694	1.7434
2.22	0.7527	0.3038	0.4549	0.6679	1.7707
2.24	0.7493	0.2991	0.4488	0.6664	1.7986
2.26	0.7460	0.2945	0.4428	0.6649	1.8271
2.28	0.7428	0.2899	0.4370	0.6635	1.8562
2.30	0.7395	0.2855	0.4312	0.6621	1.8860
2.32	0.7364	0.2812	0.4256	0.6607	1.9165
2.34	0.7333	0.2769	0.4200	0.6594	1.9476
2.36	0.7302	0.2728	0.4145	0.6581	1.9794
2.38	0.7272	0.2688	0.4091	0.6569	2.0119
2.40	0.7242	0.2648	0.4038	0.6557	2.0451
2.42	0.7213	0.2609	0.3986	0.6545	2.0789
2.44	0.7184	0.2571	0.3935	0.6533	2.1136
2.46	0.7156	0.2534	0.3885	0.6522	2.1489
2.48	0.7128	0.2497	0.3836	0.6511	2.1850
2.50	0.7101	0.2462	0.3787	0.6500	2.2218
2.52	0.7074	0.2427	0.3739	0.6489	2.2594
2.54	0.7047	0.2392	0.3692	0.6479	2.2978
2.56	0.7021	0.2359	0.3646	0.6469	2.3370
2.58	0.6995	0.2326	0.3601	0.6459	2.3770
2.60	0.6970	0.2294	0.3556	0.6450	2.4177
2.62	0.6945	0.2262	0.3512	0.6440	2.4593
2.64	0.6921	0.2231	0.3469	0.6431	2.5018
2.66	0.6896	0.2201	0.3427	0.6422	2.5451
2.68	0.6873	0.2171	0.3385	0.6413	2.5892
2.70	0.6849	0.2142	0.3344	0.6405	2.6343
2.72	0.6826	0.2113	0.3304	0.6397	2.6802
2.74	0.6804	0.2085	0.3264	0.6388	2.7270
2.76	0.6781	0.2058	0.3225	0.6380	2.7748
2.78	0.6760	0.2031	0.3186	0.6372	2.8235
2.80	0.6738	0.2004	0.3149	0.6365	2.8731
2.82	0.6717	0.1978	0.3111	0.6357	2.9237
2.84	0.6696	0.1953	0.3075	0.6350	2.9752
2.86	0.6675	0.1927	0.3039	0.6343	3.0277
2.88	0.6655	0.1903	0.3004	0.6336	3.0813
2.90	0.6635	0.1879	0.2969	0.6329	3.1358
2.92	0.6615	0.1855	0.2934	0.6322	3.1914
2.94	0.6596	0.1832	0.2901	0.6315	3.2481
2.96	0.6577	0.1809	0.2868	0.6309	3.3058

TABLE II : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
2.98	0.6558	0.1787	0.2835	0.6303	3.3646
3.00	0.6540	0.1765	0.2803	0.6296	3.4244
3.02	0.6522	0.1743	0.2771	0.6290	3.4854
3.04	0.6504	0.1722	0.2740	0.6284	3.5476
3.06	0.6486	0.1701	0.2709	0.6278	3.6108
3.08	0.6469	0.1681	0.2679	0.6273	3.6752
3.10	0.6452	0.1660	0.2650	0.6267	3.7408
3.12	0.6435	0.1641	0.2620	0.6261	3.8076
3.14	0.6418	0.1621	0.2592	0.6256	3.8756
3.16	0.6402	0.1602	0.2563	0.6251	3.9449
3.18	0.6386	0.1583	0.2535	0.6245	4.0154
3.20	0.6370	0.1565	0.2508	0.6240	4.0871
3.22	0.6354	0.1547	0.2481	0.6235	4.1601
3.24	0.6339	0.1529	0.2454	0.6230	4.2345
3.26	0.6324	0.1511	0.2428	0.6225	4.3101
3.28	0.6309	0.1494	0.2402	0.6221	4.3871
3.30	0.6294	0.1477	0.2377	0.6216	4.4655
3.32	0.6280	0.1461	0.2352	0.6211	4.5452
3.34	0.6265	0.1444	0.2327	0.6207	4.6263
3.36	0.6251	0.1428	0.2303	0.6202	4.7089
3.38	0.6237	0.1412	0.2279	0.6198	4.7929
3.40	0.6224	0.1397	0.2255	0.6194	4.8783
3.42	0.6210	0.1381	0.2232	0.6190	4.9652
3.44	0.6197	0.1366	0.2209	0.6185	5.0536
3.46	0.6184	0.1351	0.2186	0.6181	5.1435
3.48	0.6171	0.1337	0.2164	0.6177	5.2350
3.50	0.6158	0.1322	0.2142	0.6173	5.3280
3.52	0.6145	0.1308	0.2120	0.6170	5.4226
3.54	0.6133	0.1294	0.2099	0.6166	5.5188
3.56	0.6121	0.1280	0.2078	0.6162	5.6167
3.58	0.6109	0.1267	0.2057	0.6158	5.7161
3.60	0.6097	0.1254	0.2037	0.6155	5.8173
3.62	0.6085	0.1241	0.2017	0.6151	5.9201
3.64	0.6074	0.1228	0.1997	0.6148	6.0247
3.66	0.6062	0.1215	0.1977	0.6144	6.1310
3.68	0.6051	0.1202	0.1958	0.6141	6.2390
3.70	0.6040	0.1190	0.1939	0.6138	6.3488
3.72	0.6029	0.1178	0.1920	0.6134	6.4605
3.74	0.6018	0.1166	0.1902	0.6131	6.5739
3.76	0.6008	0.1154	0.1884	0.6128	6.6892
3.78	0.5997	0.1143	0.1866	0.6125	6.8064
3.80	0.5987	0.1131	0.1848	0.6122	6.9255
3.82	0.5977	0.1120	0.1830	0.6119	7.0466
3.84	0.5967	0.1109	0.1813	0.6116	7.1696
3.86	0.5957	0.1098	0.1796	0.6113	7.2945
3.88	0.5947	0.1087	0.1779	0.6110	7.4215
3.90	0.5937	0.1077	0.1763	0.6107	7.5505
3.92	0.5928	0.1066	0.1746	0.6104	7.6815
3.94	0.5918	0.1056	0.1730	0.6102	7.8147
3.96	0.5909	0.1046	0.1714	0.6099	7.9499
3.98	0.5900	0.1036	0.1699	0.6096	8.0873
4.00	0.5891	0.1026	0.1683	0.6094	8.2268
∞	0.4898	0	0	0.5833	∞