Université de M'sila
Tronc-commun sciences de la matière
Faculté des sciences
Année 2020/2021
Module Math2 semestre 2

Série N 3 Fonctions a plusieures variables.

EX01 Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis les représenter.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y+1} \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \sqrt{1-xy} \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \ln(xy) \end{array}$$

$$e: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & e(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} \end{array}$$

EX02 Calculer les limites des fonctions suivantes si elles existent.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} \frac{1}{x}\sin(xy), \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{xy}\right), \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x}{x+y},$$
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\longrightarrow(+\infty,a^2)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x.$$

EX03 Vérifier si les fonctions suivantes sont continues au point $(0,0)$.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$e: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^\alpha+y^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

EX04

1. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

$f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $g(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $h(x,y) = \ln(\sin(x+xy))$, $e(x,y) = \arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

2. Chercher f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f''_{yx} où $f(x,y) = x^3y$.

3. Calculer $f''_{x^2}(0,0)\,, f''_{yx}(0,0)\,, f''_{y^2}(0,0)$ où $f(x,y) = (1+x)^m\,(1+y)^n\,.m,n \in \mathbb{Z}$

EX05 (Devoir) Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = -y \end{cases} \end{array}$$

1. Trouver Df et représenter cet ensemble graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier la continuité au point $(0,0)$.
3. Etudier la continuité au point $(x,-x)$.
4. Calculer f'_x et f'_y Si $x \neq y$.

EX06 (*Devoir*) Soit H une fonction définie de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ comme suit:

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \ln(x+y+1) - \ln\left(-\left(x^2+y^2-9\right)\right) \end{array}$$

1. Trouver D_H et représenter cet ensemble graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les fonctions suivantes:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\ ,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) \text{ et } \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y)\,\cdot$$