Solution d'exercices de la série N1

Intégrales simples

EX01

Calcul des intégrales:

$(1) = \int (e^x)^{n+1}\, dx = \int e^x (e^x)^n\, dx = \dfrac{(e^x)^{n+1}}{n+1} + C.$

$(2) = \int \cos x \sin x dx = \int \sin x (\sin x)'\, dx = \dfrac{1}{2} (\sin x)^2 + C.$

$(3) = \int \dfrac{x}{1+x^2} dx = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{2x}{1+x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln (1+x^2) + C.$

$(4) = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$ cette intégrale est de type $\displaystyle\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$, alors $(4) = \arcsin (\ln x) + C.$

$(5) = \int e^x \sinh (e^x)\, dx$ cette intégrale est de type $\int f' \sinh f = \cosh f + C$, alors $(5) = \cosh (e^x) + C.$

EX02

Calcul des intégrales (1), (2) et (3) en utilisant l'intégration par partie:

$(1) = \int \arcsin x dx$

On pose $f(x) = \arcsin x$ et $g'(x) = 1$, alors

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x) = x$ et on a $(1) = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$, alors

$(1) = x \arcsin x - \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$ et donc

$(1) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$(2) = \sqrt{1+x^2} dx$, on coisit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $g'(x) = 1$, alors

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g(x) = x$, ce que donne

$(2) = x\sqrt{1+x^2} - \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$, ce que implique

$2(2) = x\sqrt{1+x^2} + \arg\sinh x + C$, alors

$(2) = \dfrac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \arg\sinh x + C \right].$

$(3) = \int x^n \ln (x)\, dx. \quad f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

et $g^{'}(x) = \ln x \Longrightarrow g(x) = x\ln x - x$
$(3) = x^n [x\ln x - x] - n\int x^{n-1}(x\ln x - x)\,dx$, alors
$(3) = \dfrac{1}{n+1}\left[x^n [x\ln x - x] + \dfrac{n}{n+1}x^{n+1} + C\right]$.
Calcul des intégrales (4), (5) et (6) par autres méthodes:
$(4) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$
$= \sqrt{x^2+x+2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2}}dx$, alors
$(4) = \sqrt{x^2+x+2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}x + \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right) + C.$
$(5) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{2+(\cos x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{1+\frac{1}{2}(\cos x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{1+\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$
$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \frac{-\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$, alors $(5) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C.$
$(6) = \int \tan x dx = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln(\cos x) + C.$

EX03

I)

1) Calcul $I_1 + I_2$ et $I_1 - I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int_0^\pi x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \tag{1}$$

On calcule $I_1 - I_2$ par l'intégration par partie deux fois, on trouve:

$$I_1 - I_2 = \int_0^\pi x^2\cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

2) D'après (1) et (2), on déduit que:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

II) Devoir

EX04

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

a) L'ensemble de définition de f et $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calcule de la surface

$$S(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_{-\alpha}^{+\alpha} = \arctan\alpha - \arctan(-\alpha),$$

alors
$S(\alpha) = 2\arctan\alpha$, et $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow +\infty} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \longrightarrow +\infty} (2\arctan\alpha) = \pi$.

2) On a $L = \displaystyle\int \frac{\sinh x}{\left(1+(\cosh x)^2\right)(1+\cosh x)}dx$

On pose $t = \cosh x \Longrightarrow dt = \sinh x dx$ ce que implique $L = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}$.
On utilise la décomposition en fractions simples:
$\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)} = \dfrac{At+B}{1+t^2} + \dfrac{C}{1+t}$, après des calculs simples on trouve
$A = -\dfrac{1}{2}$ et $B = C = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt, \text{ alors:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\ln t + C \\ &= -\frac{1}{4}\ln\left(1+(\cosh x)^2\right) + \frac{1}{2}\arctan(\cosh x) + \frac{1}{2}\ln(\cosh x) + C. \end{aligned}$$

EX05

1) En utilisant la décomposition à des fractions rationnelles simples, on calcule les intégrales suivantes:

$M = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \frac{A}{1-x} dx + \int \frac{B}{1+x} dx$

On cherche A et B, on trouve:

$M = A \ln(1-x) + B \ln(1+x) C.$

$H = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

$W = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \int \frac{1}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx +$

$\int \frac{B}{x-\frac{1}{2}} dx.$

$= A \ln(x-1) + B \ln\left(x-\frac{1}{2}\right) + C.$

2) On calcule les intégrales R et T en utilisant le changement de variables suivant:

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow x = 2 \arctan t$, alors

$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

$R = \int \frac{1}{4+5\sin x} dx = \int \frac{1}{4+5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2t^2+5t+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t+2)}$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{A}{t+\frac{1}{2}} dt + \int \frac{B}{t+2} dt\right].$

De meme on calcule l'intégrale T.