Solution d'exercices de la série N2

Equations differentielles

EX01

1) L'équation suivante

$$xy^{'} = (x+1)\,y \tag{1}$$

est une équation différentielle d'ordre1 à variables séparables (e.d.d1 à v.s)

on va séparer les variables:

$$\frac{y^{'}}{y} = \frac{x+1}{x}$$

tel que $y^{'} = \dfrac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+1}{x}dx$$

Par intégration

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

Ce qui imlique

$$\ln y = x + \ln x + C$$

Alors la solution est

$$y = Kx\exp x \qquad \text{tel que } K = \exp C$$

2) De meme on résoud l'équation

$$x = \left(y^2 + 1\right) y^{'} \tag{2}$$

On trouve

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}y^3 + 2y + K} \qquad \text{tel que } K = 2C$$

3) L'équation suivante

$$y^{'} = \frac{x+y}{x-y} \tag{3}$$

est une équation différentielle d'ordre 1 homogène
C'est à dire on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

L'équation (3) imlique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \tag{$3'$}$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= \frac{y}{x} \Longrightarrow y = tx \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}x + t \end{aligned}$$

Par substitution dans $\left(3'\right)$

$$\frac{dt}{dx}x + t = \frac{1+t}{1-t}$$

Après des calculs simples on trouve

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-t}{1+t^2}dt$$

On integre

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt$$

On trouve

$$\ln x = \arctan t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C \qquad \text{et } t = \frac{y}{x}$$

Alors

$$x = K \exp\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right) \quad \text{tel que } K = \exp C$$

4) De meme on integre l'équation

$$y^{'} = -\frac{x+y}{x} \tag{4}$$

On trouve

$$y = \frac{K}{2x} - \frac{x}{2} \quad \text{tel que } K = e^C$$

5) On résoud maintenant l'équation

$$\left(1 - x^2\right) y^{'} + xy = 2x \tag{5}$$

Une équation différentielle d'ordre1 linéaire; on cherche premièrement la solution générale y_G puis la solution particulière y_p et la solution globale est la somme $y_G + y_p$

a) **Solution générale (solution sans second membre)**

$$\left(1 - x^2\right) y^{'} + xy = 0$$

i.e

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1 - x^2}$$

Par intégration on trouve

$$y_G = K\sqrt{1 - x^2} \quad \text{tel que } K = e^C$$

b) **Solution particulière (solution avec second membre)**

On utilise la méthode de variation de constante

i.e

$$\begin{aligned} & y_p = K(x)\sqrt{1 - x^2} \\ \text{qui donne} \quad & y_p^{'} = K'(x)\sqrt{1 - x^2} - K(x)\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

On substitue y_p et $y_p^{'}$ dans l'équation (6) on trouve

$$K^{'}(x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{par intégration} \quad K(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} + A$$

Alors

$$y_p = 2 + A\sqrt{1 - x^2}$$

Finalement

$$y = y_G + y_p = 2 + (K + A)\sqrt{1 - x^2}$$

6) De meme méthde on résoud l'équation (6) $y' + \frac{y}{1+x^2} = x$

7) On résoud l'équation

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2 \tag{7}$$

Une équation différentielle d'ordre1 de Bernoulli avec $\alpha = 2$

On pose $z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Longrightarrow y = \frac{1}{z}$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{1}{z^2}z'$$

on remplace les valeurs y et y' dans (7), on obtient

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{x}\frac{1}{z} = -x\frac{1}{z^2}$$

i.e

$$z' - \frac{1}{x}z = x \ . \text{ on est dans le cas linéaire}$$

On résoud cette équation on trouve $z_G = Kx$ et $z_p = (x + A)\,x$. ce qui donne $z = z_G + z_p = x^2 + (A + K)\,x$.

On sait que $y = \frac{1}{z}$ alors $y = \frac{1}{x^2 + (A+K)\,x}$

8) L'équation suivante

$$y' - y = e^{-x}\sqrt{y} \tag{8}$$

est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on la résoud comme la méthode dans l'équation (7)

$z = \sqrt{y} \Longrightarrow y = z^2$ et $y' = 2zz'$ et l'équation (8) équivalente à l'équation $2z' - z = e^{-x}$, cette équation est linéaire; on la résoud comme dans l'équation (6), on trouve $z = (K + A)\,e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}e^{-x}$

et comme $y = z^2$ alors la solution est $y = \left[(K + A)\,e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}e^{-x}\right]^2$

EX02 (Devoir)

EX03

1) Résolution de l'équation

$$xy' + y - e^x = 0 \text{ avec } y\,(a) = b \tag{1}$$

Cette équation est d'ordre1 linéaire avec une condition $y(a) = b$

Alors on résoud l'équation $xy' + y = e^x$

La solution générale (sans second membre) est $y_G = \dfrac{K}{x}$ et la solution particulière $y_p = \dfrac{e^x + A}{x}$

On utilise la condition $y(a) = b$ pour trouver la constante A dans y_p

On remplace x par a et y_p par b dans l'expression $y_p = \dfrac{e^x + A}{x}$, on trouve $b = \dfrac{e^a + A}{a}$; alors $A = ab - e^a$

Ce qui donne $y_p = \dfrac{e^x - e^a + ab}{x}$

Finalement $y = y_G + y_p = \dfrac{e^x - e^a + K + ab}{x}$

2) De meme on eésoud de l'équation

$$y^{'} - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x \quad \text{avec } y(0) = 0 \tag{2}$$

EX04 (Devoir)

EX05

Toutes les équations dans cet exercice sont des équations différentielles d'ordre2 linéaire sans second membre à coefficients constants.

1) Soit l'équation suivante

$$y^{''} - 5y^{'} + 6y = 0 \tag{1}$$

On procède la méthode de résolution comme suit

Supposons que la solution générale de l'équation (1) est sous la forme $y = ke^{rx}$, alors $y^{'} = kre^{rx}$ et $y^{''} = kr^2e^{rx}$

On remplace y, $y^{'}$ et $y^{''}$ dans (1)

$$ke^{rx}\left(r^2 - 5r + 6\right) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{r^2 - 5r + 6 = 0}_{\text{équation caractéristique } (1^*)}$$

(1^*) admet deux solutions réelles $r_1 = 3$ et $r_2 = 2$

Alors

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

2) On résoud l'équation

$$y^{''}+2y^{'}+y=0 \tag{2}$$

On procède la meme méthode de résolution que dans l'équation (1), et l'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$.

Cette équation admet une solution double $r=-1$

Alors la solution est

$$\begin{aligned} y &= e^{rx}\left(C_1x+C_2\right) \\ &= e^{-x}\left(C_1x+C_2\right) \end{aligned}$$

3) On résoud l'équation

$$y^{''}+9y=0 \tag{3}$$

qui a comme équation caractéristique $r^2+9=0$

Cette équation admet deux solutions complexes $r_1=3i$ et $r_2=-3i$

Alors la solution est

$$y=C_1e^{3ix}+C_2e^{-3ix}$$

EX06

Toute les équations dans cet exercice sont des équations différentielles d'ordre2 linéaire complète à coefficients constants.

1) Soit l'équation suivante

$$y^{''}-5y^{'}+6y=e^{-x} \tag{1}$$

On résoud cette équation comme suit

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (1)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (1) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (1)}}$$

D'après l'EX05 l'équation (1), la solution générale sans second membre est

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$$

On utilise la méthode de variation des constants comme suit

On cherche $y_G=C_1\left(x\right)e^{3x}+C_2\left(x\right)e^{2x}$ la solution générale de (1) (solution avec second membre)

On résoud le système d'équations suivants avec les inconus $C_1^{'}\left(x\right)$ et $C_2^{'}\left(x\right)$

$\begin{cases} C_1^{'}(x)\,e^{3x} + C_2^{'}(x)\,e^{2x} = 0 \\ 3C_1^{'}(x)\,e^{3x} + 2C_2^{'}(x)\,e^{2x} = e^{-x} \end{cases}$ on trouve

$C_2^{'}(x) = -e^{-3x}$ alors $C_2(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + K_2$ et $C_1^{'}(x) = e^{-4x}$ alors $C_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x} + K_1$

Ce qui donne

$y_G = K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-x}$ avec $y_0 = \frac{1}{12}e^{-x}$ est une solution particulière de (1)

2) Soit l'équation

$$y^{''} + 2y^{'} + y = 1 + x \qquad (2)$$

D'après l'EX05 l'équation (2), la solution générale sans second membre est

$$y = e^{-x}(C_1 x + C_2)$$

On procède la meme méthode de résolution comme l'équation (1) de cet exercice et on cherche

$$\begin{aligned} y_G &= e^{-x}(C_1(x)\,x + C_2(x)) \\ &= C_1(x)\,xe^{-x} + C_2(x)\,e^{-x} \end{aligned}$$

On résoud le système suivant

$\begin{cases} C_1^{'}(x)\,xe^{-x} + C_2^{'}(x)\,e^{-x} = 0 \\ C_1^{'}(x)\,e^{-x} - C_1^{'}(x)\,xe^{-x} - C_2^{'}(x)\,e^{-x} = 1 + x \end{cases}$

On trouve

$$\begin{aligned} C_1^{'}(x) &= (1+x)\,e^{x} \Longrightarrow C_1(x) = xe^{x} + K_1 \\ C_2^{'}(x) &= \left(x^2 + x\right)e^{x} \Longrightarrow C_2(x) = \left(x^2 - x + 1\right)e^{x} + K_2 \end{aligned}$$

On remplace $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans y_G, on trouve

$$y_G = K_1 xe^{-x} + K_2 e^{-x} + x - 1$$

avec $y_0 = x - 1$ est une solution particulière de (2)

3) Soit l'équation

$$y^{''} + 9y = \cos x \qquad (3)$$

D'après l'EX05 l'équation (3), la solution générale sans second membre est

$$y = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix}$$

De meme comme l'équation (2), on cherche la solution générale de l'équation complète (3)

$$y_G = C_1(x)\,e^{3ix} + C_2(x)\,e^{-3ix}$$

On résoud le système d'équations suivant
$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{3ix} + C_2'(x)\,e^{-3ix} = 0 \\ 3iC_1'(x)\,e^{3ix} + -3iC_2'(x)\,e^{-3ix} = \cos x \end{cases}$$
Qui donne

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= \frac{i}{6}e^{3ix}\cos x \Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int e^{3ix}\cos x dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int (\cos 3x + i\sin 3x)\cos x dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int (\cos 3x\cos x + i\sin 3x\cos x)\,dx \end{aligned}$$

En utilisant les transformations trigonométrique $\begin{cases} \cos 3x\cos x = \dfrac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x] \\ \sin 3x\cos x = \dfrac{1}{2}[\sin 4x + \sin 2x] \end{cases}$

On trouve
$$C_2(x) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}e^{4ix} + e^{2ix}\right) + K_1$$

Et

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{i}{6}e^{-3ix} \Longrightarrow C_2(x) = -\frac{i}{6}\int e^{-3ix}dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{1}{18}e^{-3ix} + K_2 \end{aligned}$$

Alors la solution générale de (3) est

$$y = K_1e^{3ix} + K_2e^{-3ix} + \frac{1}{48}e^{7ix} + \frac{1}{24}e^{6ix} + \frac{1}{18}e^{-6ix}$$