Solution d'exercices de la série N3

Fonctions à plusieurs variables

EX01 Représentation des domaines de définition des fonctions

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+1}$

$D_f = \{(x,y) \in IR^2 / x \neq 0, y+1 \neq 0\}$.
$\quad = \{(x,y) \in IR^2 / x \neq 0, y \neq -1\}$.

C'est à dire la fonction f est définie sur le plan XOY sauf les droites d'équations $x = 0$ et $y = -1$.

2) $g(x,y) = \sqrt{1-xy}$

$D_g = \{(x,y) \in IR^2 / 1 - xy \geqslant 0\}$.

$$\begin{aligned} 1 - xy \ \geqslant \ 0 &\Longrightarrow -xy \geqslant -1 \\ &\Longrightarrow xy \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow y \leqslant \frac{1}{x} \end{aligned}$$

on représente sur le plan XOY la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Le domaine de définition de g est les points (x,y) qui se trouvent inférieur la courbe $y = \dfrac{1}{x}$.

3) $h(x,y) = \ln(xy)$

$D_h = \{(x,y) \in IR^2 / xy \geqslant 0\}$.

La fonction h soit définie où x et y sont toutes les deux positives ou négatives pour donner le produit xy est positif.

4) $e(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

$D_e = \{(x,y,z) \in IR^3 / 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0\}$.

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$$

Dans ce cas le domaine de définition est les points (x,y,z) qui se trouvent à l'intérieur de la sphère d'origine $(0,0,0)$ et de rayon 1.

EX02 Calcul des limites si elles existent:

1) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} \frac{1}{x}\sin(xy) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} y\frac{\sin(xy)}{xy} = 5$

Car $\frac{\sin(xy)}{xy} \rightarrow 1$ quand $(x,y) \longrightarrow (0,5)$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0.$

Car la fonction $\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ est bornée et $(x^2+y^2) \rightarrow 0$ quand $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

3) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x}{x+y} = \lim\limits_{r\rightarrow 0}\frac{r\cos\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}.$

Cette limite dépende de θ, alors elle n'existe pas.

4) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\rightarrow 0}\frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$

Cette limite dépende de θ, alors elle n'existe pas.

5) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(+\infty,a^2)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^{a^2}.$

Car on sait que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

EX03 Continuité des fonctions au point $(0,0)$:

On sait que une fonction $f(x,y)$ soit continue dans un point (x_0,y_0) si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} (x,y) = f(x_0,y_0)$.

1) D'après 3) dans l'EX02 $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x}{x+y}$ n'existe pas, alors $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{2x^2}{x+y} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{2x^2}{x+ax} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{1+a}x = 0 = g(0,0)$.

Dans ce cas on calcule la limite sur la direction $y=ax$, alors g est continue en $(0,0)$.

3) D'après 4) dans l'EX02 $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas, alors $h(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

4) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^\alpha - y^\alpha}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^\alpha(1-a^\alpha)}{x^2(1+a^2)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-a^\alpha}{1+a^2} x^{\alpha-2}$.

On discute cette limite d'après les valeurs de α.

a) si $\alpha = 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \neq e(0,0)$, alors e n'est pas continue en $(0,0)$.

b) si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \infty$, alors e n'est pas continue en $(0,0)$.

c) si $\alpha > 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = 0$, alors e est continue en $(0,0)$.

EX04

1) calculs des dérivées partielles premières des fonctions:

a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

$f'_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}$ (on fixe y et on dérive seulement par rapport à x)

$f'_y(x,y) = \dfrac{1}{x}$ (on fixe x et on dérive seulement par rapport à y)

b) $g(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$. alors $\begin{cases} g'_x(x,y) = \dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ g'_y(x,y) = \dfrac{\frac{-x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \end{cases}$

c) $h(x,y) = \ln(\sin(x+xy))$. alors $\begin{cases} h'_x(x,y) = \dfrac{(1+y)\cos(x+xy)}{\sin(x+xy)} \\ h'_y(x,y) = \dfrac{x\cos(x+xy)}{\sin(x+xy)} \end{cases}$

2) On a $f(x,y)=x^3y$ alors $\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2y \\ f'_y(x,y)=x^3 \\ f''_{x^2}(x,y)=6xy \\ f''_{y^2}(x,y)=0 \\ f''_{xy}(x,y)=3x^2 \\ f''_{yx}(x,y)=3x^2 \end{cases}$

3) On a $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n .m,n\in Z.$

a)
$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{m(1+x)^{m-1}}{1}=m \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{n(1+y)^{n-1}}{1}=n \end{aligned}$$

c) $$f'_x(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(x,0)}{x-0}=0$$

d) $$f'_y(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,y)}{y-0}=0$$

e)
$$\begin{aligned} f'_y(x,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1+x)^m(1+y)^n-(1+x)^m}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{n(1+x)^m(1+y)^{n-1}}{1}=n(1+x)^m \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} f''_{x^2}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-m}{x}=0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} f''_{y^2}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f'_y(0,y)-f'_y(0,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-n}{y}=0 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} f''_{yx}(x,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right)(0,0) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{n(1+x)^m-n}{x} = nm \end{aligned}$$