جامعة محمد بوضياف بالمسيلة - الجزائر-
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

محاضرات في الإحصـــاء 3

موجهة لطلبة السنة الثانية جذع مشترك علوم التسيير

S3 S2 S1

د/ بن البار موسى

فهرس المحتويات

مقدمة:

عزيزي الطالب:

بعد دراستك لأهم مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت في مقياس الإحصاء 1 أو ما يعبر عنه بالإحصاء الوصفي خلال السداسي الأول أين كنت طالبا بالسنة الأولى، لتتناول بعدها المبادئ الأساسية المتعلقة بالاحتمالات وبعض توزيعاتها في الإحصاء 2، أو ما يعبر عنه بالإحصاء الرياضي في السداسي الثاني من نفس السنة، أضع بين يديك هذه المطبوعة التي هي عبارة عن مجموعة من الدروس والتمارين في الإحصاء 3 الموجهة إلى طلبة السنة الثانية جذع مشترك قسم علوم التسيير بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بدرجة أولى، وإلى كل التخصصات التي تتناول هذا المقياس في مقرراتها.

وقد حرصت في تقديمها على بساطة العرض، بأسلوب سهل ومختصر يعتمد على أمثلة وتمارين محلولة، بعيدا على البراهين والعمليات الرياضية المعقدة، وذلك بوضع العلاقة ذات الصلة وشروط استخدامها وكيفية تطبيقها.

ولقد تضمنت هذه المطبوعة أربعة فصول، خصص الفصل الأول للعينات واختيارها حيث تم تناول مفهومها وأنواعها وطرق اختيارها ، أما الفصل الثاني فقد شمل موضوع توزيع المعاينة لكل من المتوسط والنسبة والتباين والفروق والمجاميع، وأما الفصل الثالث فقد تضمن موضوع نظرية التقدير، ليتم تخصيص الفصل الرابع لاختبار الفرضيات.

وإذ أقوم بتقديم هذا العمل المتواضع لطلبتنا في الجذع المشترك من السنة الثانية ولبعض التخصصات المتواجد ضمن مقرراتها، فإنني أهيب بزملائي الأساتذة وطلبتي الأعزاء أن لا يبخلوا عني بنصائحهم من خلال تنبيهنا لأي خطأ أو خلل تخلل هذا العمل، أو ملاحظات أو إضافات من شأنها المساهمة في الارتقاء به نحو الأحسن.

وفي الأخير آمل أن أكون قد وفقت في تقديم هذا العمل ، وأن يساهم في إثراء مكتباتنا الجامعية، وأن يكون مفيدا لطلبتنا الأعزاء، والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

د/ بن البار موسى

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

جامعة المسيلة - الجزائر-

الفصل الأول
اختيار العينات

- ✓ مصطلحات ومفاهيم
- ✓ أساليب المعاينة العشوائية
- ✓ أساليب المعاينة غير العشوائية
- ✓ تحديد حجم العينة وأساليب توزيعه على الطبقات
- ✓ تمارين محلولة

تمهيد

يتم جمع البيانات الإحصائية المتعلقة بمشكلة أو ظاهرة ما من طرف الباحث وفق أسلوبين، يتمثل الأسلوب الأول في الحصر الشامل وذلك بالتوجه لجميع مفردات المجتمع الإحصائي دون استثناء بغية الحصول على بيانات شاملة، حيث يطلق على هذا النوع أسلوب المسح الشامل والذي يتطلب تكاليف مرتفعة ويستلزم وقتا طويلا وجهدا فائقا كما أنه يحتاج إلى كوادر فنية متخصصة وذات خبرة، إلى جانب الوقت والجهد والتكلفة التي تصاحب عملية تحليل البيانات بعد جمعها، ولهذا تتجه معظم البحوث الإحصائية إلى أسلوب آخر يدعى أسلوب العينة لعدة اعتبارات أهمها[1]:

- يوفر أسلوب العينة للباحثين الجهد والتكلفة.
- توفير الوقت، فغالبا ما يكون الباحث مجبرا على جمع البيانات خلال فترة محددة.
- إمكانية الحصول على بيانات ومعلومات وفيرة لاقتصار الباحث على مجموعة جزئية من المجتمع.
- سهولة المتابعة في الحصول على ردود وافية ومتكاملة ودقيقة من خلال متابعة العينة بحجمها الصغير الممثل لأفراد المجتمع ومتابعة أجوبتها وردودها.
- سيطرة الباحث على حجم محدد من أفراد المجتمع المتمثل بالعينة يؤدي إلى سيطرته على البيانات والمعلومات المجمعة وبالتالي الدقة في التعامل مع البيانات وتجميعها.
- صعوبة وفي بعض الأحيان استحالة الوصول إلى كل وحدات المجتمع.

1- مصطلحات ومفاهيم

- ✓ **المجتمع:** مجموعة عناصر لها خاصية أو عدة خصائص مشتركة تميزها عن غيرها من العناصر الأخرى. وقد تكون منتهية أو غير منتهية.
- ✓ **العينة:** مجموعة جزئية مأخوذة من المجتمع تشترك في خاصية أو خصائص معينة ويشترط أن تكون ممثلة له.
- ✓ **المعاينة:** الكيفية أو العمليات التي تسمح بانتقاء مجموعة فرعية من المجتمع.
- ✓ **العشوائية:** أن تكون لكل مفردات العينة نفس فرصة الظهور أو الاختيار، كما لا نكون على علم مسبق بالنتائج المتوصل إليها.

[1]: عامر إبراهيم قنديلجي، **منهجية البحث العلمي**، دار اليازوري، عمان ، الأردن، 2012، ص ص (188-190).

2- أساليب المعاينة

توجد عدة طرق وأساليب يتم من خلالها اختيار العينة المراد دراستها والتي يمكن أن تنتظم في مجموعتين رئيسيتين تتمثلان في:

- المعاينة العشوائية (الاحتمالية).
- المعاينة غير العشوائية (غير الاحتمالية).

1-2 أساليب المعاينة العشوائية

يتوفر هذا الأسلوب على العديد من المزايا تلخص أهمها فيما يلي[1]:

- حذف التحيز

هذا الأسلوب يؤكد أن مفردات العينة تم اختيارها بدون تحيز، ولكن إذا تم اختيار مفردات العينة تحكميا، فهناك دائما إمكانية لوجود تحيز، وعلى الرغم من أن الاختيار العشوائي لا يضمن بأن تكون العينة ممثلة للمجتمع، إلا أنه يحذف مخاطر الاختيار المتحيز.

- تحديد الثقة

أسلوب العينات العشوائية يضع الأساس الإحصائي لتحديد الثقة المقترنة بالاستنتاج الإحصائي، والاستنتاج الاحصائي لا يمكن تنفيذه إذا كانت مفردات العينة تم اختيارها بطريقة أخرى خلاف الطريقة العشوائية.

- التحكم في خطأ المعاينة

أسلوب العينات العشوائية يسمح بالتحكم في خطأ المعاينة من خلال اختيار حجم العينة، ولكن مع الطرق غير العشوائية في اختيار العينة فإنه لا يمكن أن يتحقق مستوى مقبول من خطأ المعاينة.

[1]: جورج كانافوس، دون ميلر، ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني ،**الإحصاء للتجاريين**، مدخل حديث، دار المريخ، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2004. ص ص (33-34).

وتتمثل أساليب المعاينة العشوائية فيما يلي:

2-1- 1 - العينة العشوائية البسيطة

حيث تؤخذ العينة بشكل يعطي لأي عنصر من عناصر المجتمع نفس الفرصة لأن يكون ضمن العينة، وتستخدم في حالة المجتمعات المتجانسة والمحدودة، ويتم اختيار أفراد العينة بكتابة أرقام أفراد المجتمع على بطاقات متشابهة وخلطها بشكل جيد ثم تتم عملية السحب عن طريق القرعة، أو باستخدام جداول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسب الآلي...

ويتم استخدام جدول الأرقام العشوائية كما يلي:

نعطي كل عناصر المجتمع الإحصائي أرقاما متسلسلة من 1 إلى N ، حيث N عدد وحدات المجتمع، وبحيث يكون لكل عنصر من عناصر المجتمع نفس منزلة حجم المجتمع، أي يكون له نفس عدد الأرقام، فإذا كان حجم المجتمع 56 مثلا، فهذا العدد يتكون من رقمين، فإن كل وحدة من وحدات المجتمع الإحصائي تعطي عددا يتكون من رقمين بدء من 01 إلى غاية 52.

وإذا كان حجم المجتمع هو 325 مثلا فإن كل وحدة من وحدات المجتمع تأخذ عددا مكونا من ثلاثة أرقام كما يلي:

001، 002، 003، ...، 010، 011، ...، 099، 100، 101، ...، 323، 324، 325.

نأخذ صفحة من صفحات الجداول العشوائية (انظر الملحق رقم)، ونختار عمودا أو سطرا بحيث يكون عدد أرقامه يساوي عدد أرقام حجم المجتمع، ونأخذ كل الأرقام المحصورة ضمن المجال ونلغي البقية، وفي حالة نفاد أعداد العمود أو السطر دون الانتهاء من جحم العينة المفترض فإننا ننتقل إلى العمود أو السطر الموالي، وهكذا إلى غاية حصر العدد المطلوب من حجم العينة[1].

مثال1:

نريد اختيار عينة عشوائية 10 طلبة من الجذع المشترك من قسم علوم التسيير المكون من 300 طالبا بطريقة العينة العشوائية البسيطة، وباستخدام جداول الأرقام العشوائية.

بين كيف يتم ذلك؟

1- نحدد قائمة أسماء هؤلاء الطلبة.

2- نعطي لكل طالب عددا من الأعداد التالية:001، 002، 003، ...، 010، 011، ...، 099، 100، 101، ...، 298، 299، 300.

3- من الجدول الأول نختار السطر الخامس، فنجد أن العدد الأول هو 739، وهو مرفوض لأنه يقع ضمن المجال المختار(أكبر من 299).

[1]: عامر إبراهيم قنديلجي، **مرجع سابق**، ص ص (199 – 200). بتصرف

العدد الذي يليه: 440 مرفوض أيضا، وهكذا إلى غاية العدد الخامس 032 نقبله، ونختار الطالب ذا العدد 32، نستمر في العملية لتكون مفردات العينة هم الطلبة ذووا الأعداد التالية:

32، 148، 238، 24، 56، 128، 104، 271، 180، 151.

2-1- 2 - العينة العشوائية الطبقية

وتستخدم في حالة المجتمعات المحدودة وغير المتجانسة، حيث يقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تسمى طبقات حيث يتم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة (جامعة ⟵ كليات)،

(مجتمع ⟵ طبقات (موظفين، عمال، فلاحين)).

فهذه الطريقة تستخدم في الحالات التي تكون فيها نتائج البحث تعتمد المتغيرات المفسرة مثلا، كالعمر، الجنس، الخبرة، الدخل، طبيعة النشاط، حجم المؤسسة.

ففي هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية تعتمد على هذه الصفات وتسمى بالطبقات، ثم باستخدام طريقة العينة العشوائية يتم اختيار عينة جزئية يتناسب حجمها مع حجم الطبقة، وتشكل مجموعات العينات الجزئية المختارة ما يسمى بالعينة الطبقية.

ويتم اختيار عدد مفردات كل طبقة حسب العلاقة:

$$\text{عدد مفردات كل طبقة} = \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة}$$ [1].

مثال 2 :

بالعودة إلى معطيات المثال السابق نريد اختيار 30 طالبا على أن تكون من الطلبة والطالبات، علما عدد الطلبة الذكور هو 200، وعدد الطالبات هو 100 طالبة.

فما هو عدد الطلبة والطالبات التي تتشكل منها العينة ؟

الحل:

$$\text{عدد الطلبة الذكور} = \frac{200}{300} \times 30 = 20$$ طالبا.

$$\text{عدد الطالبات} = \frac{100}{300} \times 30 = 10$$ طالبات.

وبالتالي تتكون العينة المطلوبة من 20 طالبا و10 طالبات ، وحجمها هو 30.

ملاحظة :

قد تكون الطبقات المكونة معبرا عنها بالنسب المئوية لكل منها، في هذه الحالة يتم حساب عدد مفردات كل طبقة بالاعتماد على تلك النسب.

---

[1]: فايز جمعة صالح النجار وآخرون، **أساليب البحث العلمي، منظور تطبيقي**، دار الحامد، عمان ، الأردن، 2009، ص 96 بتصرف.

مثال 3:

في مثالنا السابق نفترض أن نسبة الطلبة الذكور هي 60%، ونسبة الإناث هي 40%.

فما هو عدد الطلبة الذكور والطالبات في عينة حجمها 30؟

الحل:

عدد الطلبة الذكور $= \frac{60}{100} \times 30 = 18$ طالبا.

عدد الطالبات $= \frac{40}{100} \times 30 = 12$ طالبة.

لاحظ أن: $18 + 12 = 30$.

مثال 4:

إذا أردنا اختيار عينة من 20 طالبا من قسمين من أقسام كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير التي تتألف من أربعة أقسام، وكان 30% من الطلبة من قسم علوم التسيير،25% من قسم العلوم المالية والمحاسبية، 25% من قسم العلوم الاقتصادية، 20% من قسم العلوم التجارية.

الحل:

- عدد الطلبة من قسم علوم التسيير $= \frac{30}{100} \times 20 = 6$ طلبة.
- عدد الطلبة من قسم العلوم المالية والمحاسبية $= \frac{25}{100} \times 20 = 5$ طلبة.
- عدد الطلبة من قسم العلوم الاقتصادية $= \frac{25}{100} \times 20 = 5$ طلبة.
- عدد الطلبة من قسم العلوم التجارية $= \frac{20}{100} \times 20 = 4$ طلبة.

لاحظ أن حجم العينة المطلوب هو: $6 + 5 + 5 + 4 = 20$ طالبا.

2-1- 3- العينة العشوائية المنتظمة

يتم اختيارها من خلال تحديد مجتمع الدراسة ووضع أفراده في قائمة بشكل عشوائي وإعطاء كل منهم رقما، ثم يتم تحديد قاعدة الاختيار وفق قسمة حجم المجتمع على حجم العينة من أجل الحصول على طول الفترة، وبعد ذلك يتم انتقاء أحد الأرقام عشوائيا من بين الأرقام التي تساوي أو أقل من طول الفترة، ليتم

اعتباره كعنصر أول من مفردات العينة ويشرع في إضافة طول الفترة له للحصول على المفردة الثانية، وهكذا نستمر في إضافة العدد الثابت إلى غاية الوصول إلى العدد الممثل لحجم العينة المطلوب.

وبهذه الطريقة نكون قد حصلنا على متتالية حسابية حدها الأول هو الرقم المختار عشوائيا في البداية، وأساسها هو طول الفترة، وعدد حدودها هو حجم العينة[1].

مثال 5:

نريد اختيار عينة عشوائية حجمها 10 وفق طريقة العينة العشوائية المنتظمة من المجتمع الإحصائي السابق ذي الحجم 300. كيف يتم ذلك؟

الحل:

1- باعتبار أن القائمة مرتبة عشوائيا، فإن طول الفترة يتم حسابه كما يلي:

طول الفترة $= \frac{300}{10} = 30$.

2- يتم اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل من أو يساوي 30. وليكن العدد الأول من الصف الأول من جدول الأرقام العشوائية وهو 11، أي الطالب ذو الرقم 11.

3- يشرع في إضافة 30 في كل مرة ليتم الحصول على الطلبة الذين تتألف منهم هذه العينة كما يلي: 11، 41، 71، 91، 121، 151، 181، 211، 241، 271.

2-1-4- العينة العشوائية العنقودية (المتعددة المراحل)

تستخدم في حالة المجتمعات الكبيرة أو لما تكون مفرداتها متباعدة جغرافيا، حيث يقسم المجتمع إلى مجموعات وتختار من هذه المجموعات عينة عشوائية بسيطة ثم نأخذ جميع الأفراد في المجموعات المختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية من مرحلة واحدة، أما إذا اخترنا عينة عشوائية بسيطة من الأفراد من كل مجموعة مختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية ذات مرحلتين، وهكذا.

أما اختيار مفردات العينة المراد دراستها فإنه يتم بنفس الطريقة المنتهجة في أسلوب العينة العشوائية البسيطة في حالة المجموعة الواحدة، أو العينة العشوائية الطبقية في حالة مجموعتين فأكثر[2].

مثال 6:

في دراسة بعنوان تطبيقات تكنولوجيا المعلومات في إدارة الجماعات المحلية الجزائرية، نريد اختيار عينة عشوائية عنقودية من بلدية ما من بلديات الوطن الجزائري تتكون من 100 موظف إداري.

-بين كيف يتم ذلك؟

---

[1]: **المرجع نفسه**، ص 95.
[2]: محمد عبد الفتاح الصيرفي ، **الدليل التطبيقي للباحثين**، دار وائل، عمان، الأردن، 2002، ص 201.

الحل:

أولا: يتم تقسيم المجتمع الإحصائي الممثل في بلديات الوطن الجزائري إلى مجموعات حسب الجهات، أي، وسط، غرب، شرق، جنوب.

في المرحلة الأولى يتم اختيار جهة من بين الجهات الأربع بشكل عشوائي، ولنفرض أننا حصلنا عن طريق القرعة على منطقة الشرق الجزائري.

في المرحلة الثانية وبعد حصر ولايات الشرق الجزائري، يتم اختيار ولاية من بين ولايات الشرق الجزائري وبشكل عشوائي، ولنفرض أننا حصلنا على ولاية المسيلة.

في المرحلة الثالثة وبعد تحديد قائمة بلديات ولاية المسيلة، يتم اختيار بلدية من بينها بشكل عشوائي، ليتم تعيين البلدية ميدان الدراسة. وفي الأخير يتم اختيار 100 موظف من موظفيها على أن يكون الاختيار أيضا بشكل عشوائيا.

والمخطط الموالي يلخص ذلك.

(الجزائر ← (وسط، غرب، شرق، جنوب) ← م1 (شرق) ← م2(ولايات) ← م3(بلديات).

2-2 أساليب المعاينة غير العشوائية (غير الاحتمالية)

رغم أهمية الأساليب العشوائية للمعاينة وتبني العديد من الباحثين لاستخدامها، فإنه توجد بعض البحوث التي تتجه إلى اختيار أساليب غير عشوائية خاصة في البحوث النوعية، حيث يسعون إلى التركيز على على جوانب أخرى مهمة في عينات البحث النوعي مثل[1]:

- غزارة البيانات والمعلومات المتوفرة عند أفراد العينة
- قربهم من الأحداث والموضوعات المعنية بالبحث.
- استعدادهم للتعاون وإعطاء المعلومات الوافية.

فأساليب المعاينة غير العشوائية إذن تقوم على مبدأ عدم تحكم الباحث في اختيار مفردات العينة، وعدم معرفة مفردات مجتمع البحث، وهذا ما يؤدي إلى عدم تساوي الفرصة لمفردات مجتمع البحث لتكون ضمن مفردات العينة، وبالتالي عدم تمثيل المجتمع، وتعميم النتائج المتوصل إليها من خلال تلك العينة على المجتمع.

والمعاينة غير العشوائية هي الأخرى تتضمن مجموعة من الأساليب سنأتي على ذكر أهمها وأكثرها استعمالا بإيجاز فيما يلي[2]:

[1]: عامر إبراهيم قنديلجي، **مرجع سابق**، ص 205.
[2]: - محمد عبد الفتاح الصيرفي، **مرجع سابق**، ص 211. بتصرف.

2-2-1- أسلوب الاختيار عن طريق الصدفة

حيث لا يخضع اختيار الباحث لمفردات العينة لأي اعتبار وإنما يكون على سبيل المصادفة، كأن يشرع الباحث في توزيع الاستبيان على مجموعة من العاملين بمؤسسة ما وذلك بتسليم الاستمارة على يلتقيه صدفة أثناء زيارته الميدانية.

أو كأن يقف أمام مدخل المؤسسة محل الدراسة ويختار الثلاثين الأوائل الذين يلتقي بهم عند دخولهم إليها.

2-2-2 - أسلوب المعاينة القصدية

هي عينة يتم اختيار أفرادها بشكل مقصود ومستهدف لتوفر بعض الخصائص فيهم بما يخدم أهداف الدراسة، ويلجأ إلى هذا النوع من العينات عند توفر البيانات اللازمة للدراسة لدى فئة محددة من المجتمع الأصلي للدراسة.

فعل سبيل المثال: عندما يريد الباحث أن يدرس سلوك المستهلكين لمنتجات مؤسسة ما، فإنه يحدد المستهلكين الحقيقيين لمنتجات تلك المؤسسة ويتجنب جمع البيانات من أشخاص لا يقبلون على انتقاء منتجاتها.

2-2-3 - أسلوب المعاينة الحصصية

سميت بالحصصية أو الحصية لأن مجتمع البحث يقسم إلى فئات طبقا لصفاته الرئيسة، وتمثل كل فئة بنسبة وجودها في المجتمع، ويتجلى الفرق بين هذا النوع من المعاينة والمعاينة العشوائية الطبقية في كون هذا الأخيرة أن اختيار مفرداتها يتم بشكل عشوائي فضلا على عدم محدودية مفردات المجتمع الأصلي في حالة المعاينة الحصصية.

وعلى العموم فعلى الباحث أن يتوخى الحذر في تفسيره لنتائج العينة عند اللجوء إلى أساليب المعاينة غير العشوائية، كما ينبغي عليه تبرير أسباب اختياره لأي منها.

ولا شك في أن نتائج الدراسة المتوصل إليها وفق طرق العينات العشوائية تكون هي الأكثر مصداقية في مختلف الدراسات الإحصائية لخلوها من عنصر التحيز.

- موريس انجرس، ترجمة بوزيد صحراوي وآخرون، **منهجية البحث في العلوم الإنسانية**، دار القصبة، الجزائر، 2004، ص ص (311- 313). بتصرف

3-تحديد حجم العينة وأساليب توزيعه على الطبقات

1-3 - اتجاهات تحديد حجم العينة

قبل الشروع في عملية اختيار العينة، يحتاج الباحث إلى تحديد حجم العينة المناسب حتى تزوده بالبيانات والمعلومات التي يعتمد عليها في تعميم النتائج على المجتمع كله. وهناك اتجاهان يمكن السير فيهما لتحديد حجم العينة[1]:

أ- الاتجاه الأول:

حيث يعتمد الباحث عند تحديد حجم العينة المطلوب على خبراته السابقة في هذا المجال، أو قد يسترشد الباحث برأي وخبرة الآخرين. وهذا الأسلوب في اختيار العينة يفيد الباحثين الذين لا يميلون إلى استخدام الأسلوب الرياضي في اختيار العينة.

ففي الدراسات المسحية يكون من الناسب 20% من أفراد لمجتمع الكلي إذا كان عدد أفراد هذه المجتمع معتدلا(ما بين 500إلى 1000)، وتقل هذه النسبة كلما كبر حجم المجتمع الأصلي لتصل إلى حوالي 5%. وفي الدراسات التجريبية ذات المعالجة الواحدة(متغير مستقل واحد) يكون حجم العينة الوحدة مناسبا إذا زاد عدد أفرادها عن 30 فردا(لكل مستوى من مستويات هذه المعالجة). أما في الدراسات التجريبية ذات المعالجتين أو أكثر، فأن من المستحسن أن لا يقل عدد أفراد الخلية الواحدة في التصميم الإحصائي عن خمسة أفراد(انظر المخطط التالي).

ب- الاتجاه الثاني

ويأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الاحتمالية لتحديد حجم العينة، كاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول واحتمال حدوث الخطأ من النوع الثاني، بالإضافة إلى بعض الأمور الأخرى المرتبطة بالتكلفة وبعض المقاييس الإحصائية .

وهناك فكرة خاطئة عند البعض بأنه كلما كبر حجم المجتمع يجب أن يزيد حجم العينة المسحوبة منه. وهذا خطأ شائع لأنه في مجتمع متجانس الصفات والخصائص تكفي عينة صغيرة لدراسته. إن التباين بين أفراد المجتمع، وليس حجم المجتمع، هو العامل الحاسم في تقرير حجم العينة. فكلما كبر التباين بين مفردات المجتمع كلما استوجب ذلك أن يكون حجم العينة كبيرا بغض النظر عن حجم ذلك المجتمع.

كلما زاد حجم العينة قل الخطأ المعياري للمعاينة، وكلما نقص حجمها زاد الخطأ المعياري للمعاينة.

[1]: سعيد التل وآخرون، مناهج البحث العلمي، **تصميم البحث والتحليل الإحصائي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007، ص ص (105-106). بتصرف

ومن أهم المبادئ التي يجب مراعاتها عند تحديد حجم العينة ما يلي[1]:

1. تحديد الهدف من اختيار العينة، وبناء على هذا الهدف تعطى حدود الخطأ المسموح به، ونوع القرار المتوقع اتخاذه بناع على البيانات التي ستوفرها العينة.
2. إعطاء علاقة تربط بين الحجم العينة المطلوب ومدى الدقة المطلوبة من العينة (حدود الخطأ المسموح به). وتختلف هذه العلاقة باختلاف طبيعة الإحصائي (Statistic) الذي سيستعمل لتقدير معلمة التوزيع (Parameter). ومثل هذه العلاقة قد تحتوي على بعض المعالم التوزيع المجهولة، ومن هنا لا بد أولا من تقديرها بناء على خبرة سابقة.
3. في بعض الحالات، مثل العينة الطبقية، تحتاج إلى تقدير حجم العينة في كل طبقة، وبالتالي يكون حجم العينة الكلي هو تلك الحجوم الجزئية.
4. في بعض الحالات قد نقيس أكثر من متغير واحد عل نفس الفرد من أفراد العينة، ويجب أن يتم حساب العينة المطلوبة بناء على التقدير المطلوب لكل متغير، مع ملاحظة أن الحجوم الناتجة قد تختلف عن الحسابات المبنية على متغير ما تلك المبنية على متغير آخر، وأحد الطرق لحل هذه الأشكال أخذ اكبر حجم ناتج.
5. يجب ربط حجم العينة مع التكلفة المتاحة للدراسة والزمن، وما شابه ذلك من عوامل قد تؤثر في حجم المجتمع.
6. معرفة حجم المجتمع الأصلي مسبقا، وان لم يكن هذا الحجم معروفا، فيمكن تقديره بإجراءات إحصائية معينة .

2-3 – أساليب توزيع العينة على الطبقات

يتم توزيع العينة على الطبقات وفقا لـ[2] :

- **أسلوب التخصيص المتساوي**: ويقوم على اختيار أعداد متساوية من المفردات من

كل طبقة، بغض النظر عن حجمها وتجانس مفرداتها أمام الظاهرة موضوع الدراسة . ورغم بساطة هذا الأسلوب، إلا إنه غير دقيق لاختلاف فرص الاختيار من طبقة أو فئة لأخرى .

- **أسلوب التخصيص النسبي:** ويقوم على اختيار عدد من المفردات من كل طبقة أو فئة تبعا لوزنها النسبي في المجتمع الأصلي.

[1]: **المرجع نفسه**، ص ص (106- 107).
[2]: عبد المجيد قدي، **أسس البحث العلمي في العلوم الاقتصادية**، دار الأبحاث، الجزائر، 2009، ص ص (88- 89).

- أسلوب نيمان : يستخدم هذا الأسلوب لتخفيض حجم التباين، حيث يؤخذ في الاعتبار تباين كل طبقة فيكون حجم العينة في الطبقة يتناسب طردا مع الانحراف المعياري لتلك الفئة أو الطبقة.وهذا قصد جعل تصميم العينة أكثر فعالية من أسلوب التخصيص النسبي.

يستخدم أسلوب نيمان في العادة، عندما يكون الانحراف المعياري مختلفا من طبقة أو فئة لأخرى، وعندما يكون حجم العينة محددا سلفا وتكلفتها ثابتة لمختلف الطبقات أو الفئات. وبناء على ذلك يقدر حجم العينة للطبقة، حسب المعادلة التالية:

$$n_h = \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^{l} N_h S_h}$$

حيث: l عدد الطبقات

N_h عدد وحدات المعاينة في الطبقة n.

h عدد العينات لجميع الطبقات

Sh الانحراف المعياري على مستوى كل طبقة

يمكن الحصول على الانحراف المعياري على مستوى كل طبقة من خلال تعداد سابق أو يتم تقديره من عينات سابقة.

- **أسلوب التخصيص الأمثل:** يقوم هذا الأسلوب على الأخذ في الحسبان درجة تجانس الظاهرة داخل كل طبقة أو فئة. وبالتالي يتم زيادة حجم و عدد المفردات الطبقة أو الفئة التي تقل فيها درجة التجانس ضمن العينة. ويهدف هذا الأسلوب إلى تخفيض التباين لأقل قدر ممكن بكلفة محددة أو تقليل الكلفة اقل ما يمكن بمستوى دقة معين.حيث يدخل عامل الكلفة في توزيع العينات على الطبقات.

يستخدم هذا الأسلوب عادة، عند وجود تفاوت في كلفة جمع المعلومات بين الطبقات او الفئات(ككلفة جميع المعلومات من المناطق البعيدة وكلفة جمعها من المناطق القريبة).

من بين المعادلات للتخصيص الأمثل:

$$n_h = \frac{N_h S_h / C_h}{\sum_{h=1}^{l} N_h S_h / C_h}$$

علما بان $_h$ هي تكلفة إحصاء وحدة المعاينة الواحدة للطبقة h.

تمارين السلسلة الأولى: اختيار العينات (الحل في حصة الأعمال الموجهة).

التمرين الأول:

أجب عن الأسئلة التالية:

1- حدد الفرق بين الإحصاء الوصفي والإحصاء الرياضي؟
2- ما المقصود بالمعاينة العشوائية؟ وما أهميتها؟
3- لماذا يلجأ إلى أسلوب العينة في معظم الدراسات الإحصائية؟

التمرين الثاني:

ما هو أسلوب المعاينة المناسب في كل حالة مما يلي مع التبرير:

1. دراسة برامج المؤسسات الصناعية الجزائرية تجاه المحافظة على البيئة المحيطة.
2. الوقوف بمدخل الجامعة واستجواب الطلبة الخمس الذين يتم لقاؤهم حول موضوع معين.
3. استجواب الرجال والنساء المتسوقين بمحل سوبرات وسط المدينة حول اتجاهاتهم نحو أثر ارتفاع الأسعار على القدرة الشرائية بالوطن.
4. دراسة تتعلق بتجار التجزئة لمنتجات مؤسسة ما في ضوء استراتيجية تسويقية ما.
5. دراسة حول مستوى رضا العاملين بقسم الأطفال بأحد مستشفيات ولاية المسيلة الموجودة في الشرق الجزائري.

التمرين الثالث:

نرغب في سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 250.

بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين الرابع:

نريد اختيار عينة عشوائية منتظمة من مجتمع إحصائي حجمه 600. وبافتراض أن مفرداته متوفرة ضمن قائمة مرتبة. حدد أرقام مفردات العينة المسحوبة منه ذات الحجم 30.

التمرين الخامس:

عند دراسة اتجاهات طلبة ليسانس بكلية العلوم الاقتصادية بجامعة المسيلة نحو تخصصات الماستر المتاحة بها بالأقسام الأربعة، و بعد الرجوع إلى السجلات الرسمية وبافتراض أنه تم الحصول على البيانات المدونة في الجدول أدناه:

التخصص	علوم التسيير	مالية ومحاسبة	علوم تجارية	علوم اقتصادية	المجموع
عدد الطلبة	280	260	220	240	1000

وأردنا سحب عينة عشوائية منه بحيث يكون عدد مفرداتها منه هو 10% من مجموع مفردات المجتمع، بحيث تكون كل التخصصات ممثلة في العينة.

- ما هو تبريرك لإمكانية اختيار عينة عشوائية من المجتمع الإحصائي؟
- ما هو نوع هذه العينة العشوائية؟
- ما هو حجم العينة الكلي المطلوب؟
- ما هو حجم العينة الممثل للمجتمع الإحصائي في كل قسم من أقسام الكلية؟

الفصل الثاني : توزيع المعاينة

- ✓ مصطلحات ومفاهيم
- ✓ توزيع المعاينة للمتوسط
- ✓ توزيع المعاينة للنسبة
- ✓ توزيع المعاينة للتباين
- ✓ توزيع المعاينة للفروق والمجاميع
- ✓ توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين
- ✓ تمارين محلولة

تمهيد:

يقوم الباحث باختيار الأسلوب المناسب للعينة العشوائية وتحديد المقياس أو المقاييس التي ستتم دراستها في العينة، وذلك بدراسته للخاصية أو الصفة التي تتعلق بالعينة من أجل الاستدلال من خلالها على خاصية أو صفة معينة تقابلها في المجتمع التي أخذت منه تلك العينة، وهذا الاتجاه في الدراسة يعتبر هو الفكرة الأساسية التي يقوم عليها الاستدلال الإحصائي، وفي هذا الفصل سيتم تناول بعض المقاييس التي تتصف بها العينة كالمتوسط الحسابي والانحراف المعياري والنسبة والاسترشاد من خلالها على المقاييس المقابلة لها في المجتمع بالإضافة إلى نوع التوزيع لكل منها.

1- مصطلحات ومفاهيم[1]

- ✓ **معالم المجتمع:** تتمثل في الخصائص المتعلقة بالمجتمع مثل المتوسط، التباين، ...
- ✓ **إحصائية العينة:** تتمثل في الخصائص المتعلقة بالعينة مثل: المتوسط ، التباين،...
- ✓ **المعاينة:** الكيفية أو العمليات التي تسمح بانتقاء مجموعة فرعية من المجتمع.
- ✓ **المعاينة النفادية:** تكون المعاينة نفادية عندما يكون السحب بدون إرجاع لأن المجتمع يتناقص مع تكرار ومواصلة السحب، إذ يستحيل أن تظهر مفردة في العينة أكثر من مرة، وفي هذه الحالة لا تكون نتائج السحب مستقلة.
- ✓ **المعاينة غير النفادية:** هي تلك المعاينة التي يكون فيها السحب مع الإرجاع، وتسمى غير نفادية لأنها لا تؤدي إلى نفاد وزوال مفردات المجتمع، كما أن المفردة يمكن أن تظهر أكثر من مرة في العينة، وهنا تكون متغيرات العينة مستقلة ولها نفس التوزيع.
- ✓ **توزيع المعاينة:** يعبر توزيع المعاينة عن قيم المقياس المحسوبة (متوسط حسابي أو نسبة أو تباين ...) لكل عينة من العينات العشوائية التي لها نفس الحجم (n)، والتي يمكن سحبها من المجتمع قيد الدراسة، فهو إذن توزيع احتمالي لجميع القيم الممكنة لإحصاءة ما في كل العينات العشوائية الممكنة والتي لها نفس الحجم.
- ✓ **خطأ المعاينة:** هو الفرق بين القيمة المحسوبة لإحصائية العينة وقيمة معلمة المجتمع المناظرة لها.
- ✓ **الخطأ المعياري:** هو الإنحراف المعياري لقيم الإحصاءة الممكنة في كل العينات العشوائية الممكنة التي من نفس الحجم.

---

[1]: - جورج كانافوس، دون ميلر، ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني، **مرجع سابق**، ص 271. بتصرف.
- د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص 80.بتصرف

2- توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي

من أجل تحديد العلاقة بين المتوسط الحسابي للمجتمع والمتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة في حالتي السحب بدون إرجاع والسحب مع الإرجاع نعرض المثال الموالي[1]:

مثال 1 :

مجتمع يتكون من 5 مفردات هي (2، 4، 6، 8، 10)، قمنا بسحب جميع العينات المكونة من مفردتين والمطلوب هو:

1- تحديد العينات الممكن سحبها بدون إرجاع.
2- تحديد العينات الممكن سحبها إذا كان السحب بإرجاع.
3- حساب المتوسط الحسابي والتباين للمجتمع.
4- تكوين توزيع المعاينة لمتوسطات العينات الممكنة ثم حساب الوسط والتباين لتوزيع المعاينة في حالة السحب بدون إرجاع.
5- الإجابة على الفرع السابق في حالة السحب مع الإرجاع.
6- مقارنة الإجابات في الأسئلة رقم 4 و رقم 5 مع النتائج المحصل عليها في السؤال رقم 3.
7- اشتقاق العلاقة بين كل من توزيع المعاينة لكل من المتوسط الحسابي والتباين في حالتي السحب بدون إرجاع والسحب مع الإرجاع.

الحل:

1- لإيجاد عدد العينات التي يمكن سحبها بدون إرجاع نستخدم التوفيقة:

$$C^{5}_{2} = 5.4.3.2\,!\,/\,2!3\,! = 10$$

العينات الممكن سحبها هي:

(2، 4)، (2، 6)، (2، 8)، (2، 10)، (4، 6)، (4،8)، (4، 10)، (6، 8)، (6، 10)، (8، 10).

[1]: المثال مقتبس من:
محمد حسين محمد رشيد، منى عطا الله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج SPSS**، دار صفاء، عمان، الأردن، 2012، ص ص (378- 383) بتصرف.

2- في هذه الحالة تم السحب مع الإرجاع وبالتالي نستخدم القائمة لتحديد عدد العينات الممكن سحبها:

$5^2=25$

العينات الممكن سحبها هي:

(2، 2)، (2، 4)، (2، 6)، (2، 8)، (2، 10).

(4، 2)، (4، 4)، (4، 6)، (4، 8)، (4، 10).

(6، 2)، (6، 4)، (6، 6)، (6، 8)، (6، 10).

(8، 2)، (8، 4)، (8، 6)، (8، 8)، (8، 10).

(10، 2)، (10، 4)، (10، 6)، (10، 8)، (10، 10).

3- حساب المتوسط الحسابي والتباين للمجتمع:

- المتوسط الحسابي: $\mu = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$

- التباين للمجتمع M $\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N}$

$$= \frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + \dots + (10-6)^2}{5} = 8$$

4- لتكوين توزيع المعاينة لمتوسطات العينات الممكنة في حالة السحب بدون إرجاع نقوم أولا بحساب المتوسط الحسابي لكل من العينات العشر المختلفة:

يتم حساب المتوسط الحسابي لكل عينة وفق العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$

فمثلا: تم حساب المتوسط الحسابي للعينة الأولى (2،4) في الجدول

$$\frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

العينة	(2،4)	(2،6)	(2،8)	(2،10)	(4،6)	(4،8)	(4،10)	(6،8)	(6،10)	(8،10)
المتوسط الحسابي	3	4	5	6	5	6	7	7	8	9

وانطلاقا من قيم المتوسط الحسابي في كل عينة نقوم بتكوين توزيع المعاينة له وحساب متوسطه وتباينه كما يلي:

قيمة المتوسط $\bar{X}_i$	التكرارات f	$\bar{X}_i \times f$	$\bar{X}_i^2$	$\bar{X}_i^2 \times f$
3	1	3	9	9
4	1	4	16	16
5	2	10	25	50
6	2	12	36	72
7	2	14	49	98
8	1	8	64	64
9	1	9	81	81
المجموع	10	60	/	390

حساب متوسط المتوسطات: $\mu_{\bar{X}} = \frac{60}{10} = 6$

أما قيمة التباين فهي : $\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2 = \frac{390}{10} - 6^2 = 3$

5- تكوين توزيع المعاينة لمتوسطات العينات في حالة السحب مع الإرجاع:

العينة	المتوسط الحسابي	العينة	المتوسط الحسابي
(2 ،2)	2	(8 ،6)	7
(2،4)	3	(10 ،6)	8
(6 ،2)	4	(8،2)	5
(8 ،2)	5	(4 ،8)	6
(10 ،2)	6	(6 ،8)	7
(2 ،4)	3	(8 ،8)	8
(4 ،4)	4	(10 ،8)	9
(6 ،4)	5	(10،2)	6
(8 ،4)	6	(4 ،10)	7
(10 ،4)	7	(6 ،10)	8
(2 ،6)	4	(8 ،10)	9
(4 ،6)	5	(10 ،10)	10
(6 ،6)	6		

بعد الحصول على المتوسطات الحسابية نستخدم الجدول الموالي من أجل تحديد قيمتي المتوسط الحسابي والتباين في حالة السحب مع الإرجاع:

قيمة المتوسط $\bar{X}_i$	التكرارات f	$\bar{X}_i \times f$	$\bar{X}_i^2$	$\bar{X}_i^2 \times f$
2	1	2	4	4
3	2	6	9	18
4	3	12	16	48
5	4	20	25	100
6	5	30	36	180
7	4	28	49	196
8	3	24	64	192
9	2	18	81	162
10	1	10	100	100
المجموع	25	150	/	1000

حساب متوسط المتوسطات: $\mu_{\bar{X}} = \frac{150}{25} = 6$

أما قيمة التباين فهي: $\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2 f_i}{\sum f_i} - \mu^2_{\bar{X}} = \frac{1000}{25} - 6^2 = 4$

6- مقارنة نتائج حالتي السحب:

	المجتمع	العينة دون إرجاع	العينة مع الإرجاع
المتوسط الحسابي	6	6	6
التباين	8	3	4

من خلال الجدول السابق يتضح بأن قيمة المتوسط الحسابي في المجتمع هي نفسها عند توزيع المعاينة في كل من الحالتين سواء السحب مع الإرجاع أو بدون إرجاع.

أما بالنسبة للتباين فإن قيمه جاءت مختلفة في الحالات الثلاث، أي في المجتمع وحالتي السحب أيضا.

7- اشتقاق العلاقة لكل من المتوسط والتباين في حالتي السحب

أولا: بالنسبة للمتوسط الحسابي

المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة في حالة السحب بإرجاع أو بدون إرجاع :

$$\overline{X} = \mu_{\overline{X}} = \mu$$

ثانيا: بالنسبة للتباين

أ- في حالة السحب مع الإرجاع:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ب- في حالة السحب دون الإرجاع:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

التحقق:

أولا: بالنسبة لمتوسط توزيع المعاينة للمتوسط في حالتي السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن القيمة ثابتة ومساوية لمتوسط المجتمع، وبالتالي فإن: $\mu = \mu_{\overline{X}} = \overline{X}$

ثانيا: بالنسبة لتباين توزيع المعاينة للمتوسط:

أ- في حالة السحب مع الإرجاع: $\sigma_{\overline{X}}^2 = 4$.

وتباين المجتمع $\sigma^2 = 8$.

وباستخدام العلاقة: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ والتعويض نجد:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{2} = 4$$

ب- في حالة السحب بدون إرجاع: $\sigma^2 = 8$. $\sigma_{\overline{X}}^2 = 3$.

وباستخدام العلاقة: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

والتعويض نجد: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \times \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{8}{2} \times \left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 3$

ومما سبق نستخلص ما يلي:

- $\overline{X}$ قيمة ثابتة في العينة الواحدة، ولكن إذا كان لدينا عددا كبيرا من العينات فإن$\overline{X}$ يعتبر متغير عشوائي والتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $(\overline{X})$ يطلق عليه توزيع المعاينة للمتوسط وبالتالي فإن إحصاءات توزيع المعاينة للمتوسط هي:
  $\mu_{\overline{X}}$: المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة.
  $\sigma_{\overline{X}}$: الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة (نسميه الخطأ المعياري للمتوسط)
- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط مساو لمتوسط المجتمع سواء كانت المعاينة غير نفادية أو نفادية (السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع) ومهما كان حجم العينة المسحوبة.

ملاحظات:

- في حالة المجتمعات الكبيرة فإن صيغة الانحراف المعياري سواء كانت المعاينة غير نفادية أو نفادية تكون كما يلي: $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

أي هي نفسها صيغة الانحراف المعياري لما تكون المعاينة غير نفادية، حيث أنها تعتمد فقط على حجم العينة، وأن قيمة $\sigma_{\overline{X}}$ تقل مع زيادة حجم العينة.

- يطلق على النسبة: $\frac{n}{N}$ معدل الاستقصاء.
- عندما تكون قيمة معدل الاستقصاء أقل من 0.05 أي ($\frac{n}{N} < 0.05$) فإنه يتم إهمال قيمة معامل الإرجاع$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ في علاقة التباين[1].

3- نوع توزيع المعاينة للمتوسط

سيتم هنا تناول طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع طبيعيا أو غير طبيعي.

[1]: - د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.

- صالح بو عبدالله، **محاضرات الإحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المسيلة،2006/2005. ص-5-VII .

3-1- نوع توزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون للمجتمع توزيع طبيعي

إذا كان المجتمع الذي تتم منه المعاينة له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة أيضا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري $\sigma_{\overline{X}}^2$ ، ونكتب:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$ ومنه: $$z = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

مثال 2:

يختار مراجع عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع من 1000 حساب مدين يفترض أنها تتوزع طبيعيا حيث متوسط قيمة الحساب المدين للمجتمع هي 26000 دج بانحراف معياري 4500 دج.

ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 دج؟

الحل:

$\mu = 26000$, $\sigma = 4500$, $N = 1000$, $n = 16$

$P(\overline{X} < 28250) = ?$

$n = 16 : \ n/N = 16/1000 = 0.016 < 0.05$ (نهمل معامل الإرجاع)

$\Rightarrow \sigma_m = \sigma/\sqrt{n} = 4500/\sqrt{16} = 1125$

$X \sim N(26000, 4500) \Rightarrow \overline{X} \sim N(4500, 1125)$

$$\mathcal{Z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{28250 - 26000}{1125} = 2$$

$$P(\bar{x} < 28250) = P(\mathcal{Z} < 2) = 0.5 + P(0 < \mathcal{Z} < 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

أي أن احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 هو: 0.9772

3-2- نوع توزيع المعاينة لمتوسط العينة عندما يكون المجتمع له توزيع غير طبيعي

تصادفنا العديد من الحالات التي لا يمكننا فيها تحديد طبيعة توزيع المجتمع، الأمر الذي يحولنا عن تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة، ومع ذلك فقد تمكن علماء الإحصاء من إثبات أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$

هو التوزيع الطبيعي في حالة العينات ذات الأحجام الكبيرة أيا كان توزيع المجتمع، وهذه النتيجة الحاسمة تعرف باسم نظرية النهاية المركزية[1].

نظرية النهاية المركزية

إذا كان حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، بغض النظر عن شكل المجتمع الأصلي ذي المتوسط μ والانحراف المعياري σ، ولذلك يمكن حساب احتمال أن يكون $\overline{X}$ لعينة عشوائية من خلال القيمة الإحصائية لـ $\mathcal{Z}$ وفق العلاقة الشهيرة:

$$\overline{X} \approx \mathrm{N}(\mu, \sigma_{\overline{X}}) \quad \text{ويكون:} \quad \mathcal{Z} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}$$

مثال 3:

شركة مختصة في صناعة الحافلات وتقترح 70 كغ لوزن الراكب بانحراف معياري 10 كغ، إذا علمت أنها قامت بتصميم حافلة لنقل العمال حمولتها القصوى هي 2880 كغ وتتسع إلى 36 عاملا، فما هو احتمال أن تحمل هذه الحافلة أكبر من حمولتها؟

الحل:

نلاحظ أن: $\overline{X} = \frac{2400}{36} = 80$

المطلوب حساب: $P(\overline{x} > 80) = ?$

$\mu = 70, \sigma = 10 , X \sim ? , n = 36.$

توزيع المجتمع مجهول لكن حجم العينة 36 أكبر من 30.

وبالاستناد على نظرية النهاية المركزية نستنتج بأن متوسطات أوزان العمال تقترب من التوزيع الطبيعي.

---

[1]: للاستزادة أكثر حول الفكرة الأساسية لنظرية النهاية المركزية يمكن الى: أنيس اسماعيل كنجو، **الإحصاء والاحتمال**، مكتبة العبيكان، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2000.

$$\mathcal{Z}=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{80-70}{24/\sqrt{36}}=2.5$$

$$P(\overline{x}>80)=P\left(\mathcal{Z}>2.5\right)=0.5-0.4938=0.0062.$$

4- توزيع المعاينة للنسبة

في العديد من الحالات تكون المعلمة الأساسية هي النسبة p، ومن أمثلة ذلك نسبة الفواتير التي بها أخطاء، نسبة المكالمات التليفونية التي تتجاوز حدا قياسيا، نسبة شيكات العملاء التي بدون رصيد، نسبة الوحدات المرتجعة من العملاء، والنسبة p' في العينة هي أفضل إحصاءة يمكن استخدامها للاستدلال عن النسبة P في المجتمع.

1-4 المتوسط والخطأ المعياري للنسبة

إذا كان لدينا مجتمع ما نسبة صفة معينة فيه هي P ، وتم سحب عينة منه ذات حجم **n** نسبة نفس تلك الصفة فيها هي **p'** ، فإن قيمة كل من المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة يكونان كما يلي:

$$\mu_{p'}=p\ ,\ \sigma_{p'}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

حيث:

$\mu_{p'}$: متوسط توزيع المعاينة للنسبة.

p: نسبة النجاح في المجتمع.

q: نسبة الفشل في المجتمع. $q=1-p$

$\sigma_{p'}$: الانحراف المعياري للإحصائية **p'** .

مثال 4:

حدد كلا من المتوسط والخطأ المعياري لنسبة العينة في كل حالة مما يلي:

أ- عينة حجمها 100 ، سحبت من مجتمع نسبته 0.5

ب- عينة حجمها 20 سحبت من مجتمع نسبته 0.5

ت- ما هو تعليقك على النتيجتين ؟

الحل:

أ- متوسط العينة للنسبة في الحالة أ.

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.5$ (متوسط العينة للنسبة)

- الانحراف المعياري لنسبة العينة:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{100}} = 0.05.$$

ب-متوسط العينة في الحالة ب:

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.5$ (متوسط العينة للنسبة)

- الانحراف المعياري لنسبة العينة:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{20}} = 0.11$$

ج- نلاحظ بأن قيمة متوسط النسبة لم تتغير بتغير حجم العينة في نفس المجتمع، بينما ارتفعت قيمه الانحراف المعياري بانخفاض حجم العينة.

2-4- نوع توزيع المعاينة للنسبة p في العينة

النظرية الموالية توضح طبيعة توزيع 'p .

إذا تم أخذ عينات عشوائية من الحجم n ($n > 30$) من مجتمع ذي الحدين بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$ ، فإن توزيع المعاينة لـ p' (والتي تمثل نسبة النجاح)، يتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي $\mu_{p'}$ وانحراف معياري $\sigma_{p'}$، حيث أن:

$$\mu_{p'} = p \;,\; \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

فإن: $p' \approx N(P, \sigma_{p'})$

وتكون قيمة $\mathcal{Z}$ تساوي: $\mathcal{Z} = \frac{p'-p}{\sqrt{pq/n}}$

و $p' = \frac{X}{n}$ هي قيمة المتغير العشوائي القياسي.

مثال 5:

إذا كان احتمال نجاح الطالب بدون ديون في كلية العلوم الاقتصادية هو 0.9، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من أولئك الذين يدرسون في الكلية، ما هو احتمال أن تزيد نسبة هؤلاء الطلبة بدون دوين على 80% ؟

الحل:

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.9$ (متوسط العينة للنسبة)

أما الانحراف المعياري فيحسب كما يلي:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.9\,(1-0.9)}{49}} = 0.042.$$

وبما أن حجم العينة $n = 49 > 30$ وبالاعتماد على النظرية السابقة فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي ويكون لدينا:

$$P(p' > 0.8) = p\left(\mathcal{Z} > \frac{p'-p}{\sigma_{p'}}\right)$$

$$= p\left(\mathcal{Z} > \frac{0.8-0.9}{0.042}\right) = p\,(\mathcal{Z} > -2.38)$$

$$P(p' > 0.8) = P(\mathcal{Z} > -2.38) = 0.5 + P(0 < \mathcal{Z} < 2.38)$$

$$= 0.5 + 0.4913 = 0.9913$$

5- توزيع المعاينة للتباين

بالعودة للمثال[1] رقم (1) من هذا الفصل سيتم حساب متوسط تباينات جميع العينات المسحوبة في حالتي المعاينة النفادية وغير النفادية ومقارنة متوسط التباينات في كل حالة منها مع تباين المجتمع:

أولا: في حالة المعاينة النفادية (السحب دون إرجاع)

تحسب تباينات العينات ذات n الحجم وفق العلاقة التالية:

$$S^2 = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2}$$

العينة	المتوسط الحسابي	$(x_i - \bar{x})^2/2$
(2،4)	3	1
(2،6)	4	4
(2،8)	5	9
(2،10)	6	16
(4،6)	5	1
(4،8)	6	4
(4،10)	7	9
(6،8)	7	1
(6،10)	8	4
(8،10)	9	1
المجموع	/	50

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{25} = \frac{50}{10} = 5$$

ثانيا: في حالة المعاينة غير النفادية (السحب مع الإرجاع).

---

[1]: سامح جزماتي، **الاحتمالات والإحصاء**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، دمشق، 1989. ص ص.

العينة	المتوسط الحسابي	$(x_i-\overline{x})^2/2$
(2 ،2)	2	0
(2،4)	3	1
(6 ،2)	4	4
(8 ،2)	5	9
(10 ،2)	6	16
(2 ،4)	3	1
(4 ،4)	4	0
(6 ،4)	5	1
(8 ،4)	6	4
(10 ،4)	7	9
(2 ،6)	4	4
(4 ،6)	5	1
(6 ،6)	6	0
(8 ،6)	7	1
(10 ،6)	8	4
(8،2)	5	9
(4 ،8)	6	4
(6 ،8)	7	1
(8 ،8)	8	0
(10 ،8)	9	1
(10،2)	6	16
(4 ،10)	7	9
(6 ،10)	8	4
(8 ،10)	9	1
(10 ،10)	10	0
المجموع	/	100

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{25} = \frac{100}{25} = 4.$$

$$E(S^2) = 4 = 8\ .(\frac{2-1}{2})\ (\frac{5}{5-1}) = \sigma^2(\frac{n-1}{n})\ (\frac{N}{N-1}).$$

6- توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

في الحالة التي يكون عندنا عينتين مأخوذتين من مجتمعين مختلفين فإنه يمكن استنتاج كل من الفروق والمجاميع وتوزيعها لعدة خصائص تتعلق بهما كما يلي:

1-6 الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي والتباين والنسبة لتوزيع المعاينة

إذا كانت كانت $x_1, x_2, \ldots x_n$ عينة مأخوذة من توزيع متوسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1، أو له صفة معينة نسبتها هي p_1 وكانت $y_1, y_2, \ldots y_n$ عينة أخرى مأخوذة من توزيع آخر متوسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2، وله صفة معينة نسبتها p_2.

فإنه يمكن الحصول على توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة وفق العلاقات التالية[1]:

الجدول 2-1: توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة

	المتوسط الحسابي	التباين	النسبة
الفروق	$\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_1 - \mu_2$	$\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}$	$\mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = p_1 - p_2$
المجاميع	$\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = \mu_1 + \mu_2$	$\sigma^2_{\bar{x}+\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}$	$\mu_{\bar{p}_1 + \bar{p}_2} = p_1 + p_2$

المصدر: من تلخيص الباحث.

مثال 6:

أخذت عينة حجمها 30 وحدة من توزيع متوسط الحسابي 75 وتباينه 25، وأخذت عينة ثانية حجمها 60 من توزيع آخر مستقل متوسطه الحسابي 60 وتباينه 15.

أوجد الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للتوزيعين.

[1]: دلال القاضي وآخرون، **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار الحامد، عمان، الأردن، 2005، ص ص (215- 219). بتصرف

الحل:

أولا: بالنسبة للفروق

المتوسط الحسابي : $\mu_{\overline{x}-\overline{y}} = 75 - 60 = 15$

أما الفروق بين الانحرافين : $\sigma_{\overline{x}-\overline{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$

ثانيا: بالنسبة للمجاميع:

المتوسط الحسابي : $\mu_{\overline{x}+\overline{y}} = 75 + 60 = 135$

أما المجاميع بين الانحرافين : $\sigma_{\overline{x}+\overline{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$

2-6 طبيعة توزيع المعاينة لمجموع أو الفرق بين متوسطين

إذا كانت العينتان المسحوبتان من مجتمعين طبيعيين أو حجم كل منهما يساوي أو يفوق 30 مفردة فإن الفرق بين متوسطي العينتين أو مجموعهما يتبع أو يقترب من التوزيع الطبيعي[1]، حيث:

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right) \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow \frac{\left(\overline{x}-\overline{y}\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \to N(0,1)$$

مثال 7:

تم سحب عينتين عشوائيتين من شركتين مختلفتين لإنتاج الأدوية، وكانت الأجور المدفوعة من قبل الشركتين تتبع التوزيع الطبيعي، وأن معدل الأجور المدفوعة من الشركة الأولى إلى 25 عاملا تساوي 35000 دج بانحراف معياري 4000 دج، أما معدل الأجور لـ 40 عاملا فهو 28000 دج بانحراف معياري 6000 دج.

- ما هو احتمال أن يزيد معدل الأجور في الشركة الأولى بـ 8000 دج على الأقل عن الشركة الثانية؟

الحل:

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء مبادئ وتحليل باستخدام SPSS**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2004، ص 192. بتصرف.

نلخص معطيات المثال في الجدول الموالي:

	الشركة الأولى	الشركة الثانية
المتوسط الحسابي	μ_1=35000	μ_2=28000
الانحراف المعياري	σ_1= 4000	σ_2= 6000
حجم العينة	25	40

$$\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_1 - \mu_2 = 35000 - 28000 = 7000$$

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4000^2}{25} + \frac{6000^2}{40}} = 981.83$$

$$p(\bar{x} - \bar{y} > 8000) =$$

$$= p[\mathcal{Z} > (8000) - (7000)/981.83] = p[\mathcal{Z} > 1.02 \ ]$$

$$= 0.5 - 0.3461 = 0.1539$$

7- توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين

عند المقارنة بين تبايني مجتمعين فإننا نحتاج إلى النسبة بين تبايني عينتين مأخوذتين منهما، وهذا يمهد لدراسة أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المستخدمة كثيرا وهو توزيع فيشر.

1-7 توزيع فيشر[1]

يعتبر توزيع فيشر أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة والمستخدمة في اختبار الفرضيات وفي تحليل التباين، حيث يعرف متغيره العشوائي بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(F) = \frac{c\, F^{\left(\frac{\nu_1-2}{2}\right)}}{(\nu_2 + \nu_1 F)^{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}} \; ; \; F > 0$$

حيث ν_2،ν_1 هما درجات الحرية و c ثابت يعتمد عليهما ويتحدد ليجعل المساحة تحت منحني التوزيع تساوي 1.

---

[1]: معتوق أمحمد، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007، ص ص (44-45).

فهذا التوزيع يتضمن عددين لدرجات الحرية، وحيث أن ν_2 لا تظهر إلا في المقام فإنه يعتبر درجات حرية المقام، ويعتبر ν_1 درجات حرية البسط ونكتب: $X \sim F_{\nu1,\, \nu2}$

2-7 خواص توزيع فيشر

- أحادي المنوال، وملتوي إلى اليمين قليلا.
- موجب لجميع قيم F.
- كلما زادت درجات الحرية ν_1،ν_2 يقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي.

توجد جداول خاصة بتوزيع فيشر لإيجاد قيمة F التي على يسارها مساحة ما بدرجات حرية ν_1،ν_2.

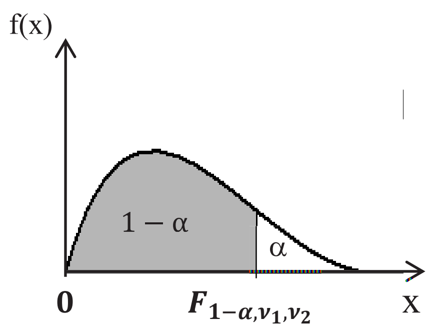
حيث قيم ν_1 توجد في السطر الأفقي أعلى الجدول أما قيم ν_2 فتوجد على العمود الأيسر من الجدول ونجد المساحات أوالاحتمالات إما بالعمود المحاذي لعمود قيمν_2 أو كمساحة مستقلة بجدول خاص قيمتها أعلى ذلك الجدول.

كما يمكن حساب قيمة $\boldsymbol{F}$ بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\mathrm{F} = \frac{x_1^2/\nu_1}{x_2^2/\nu_2} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}$$

حيث إن x_1^2 هي قيمة توزيع كاي تربيع بدرجة حرية ν_1، x_2^2 هي قيمة توزيع كاي تربيع بدرجة حرية ν_2، أما S_1^2 و S_2^2 هما تباينا العينتين ذات الحجمين n_1 و n_2 على الترتيب.

الشكل 2-1 : منحنى توزيع فيشر



والنظرية الموالية تتناول المعاينة للنسبة بين تباينين:

ليكن $^2_1$ تباين عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $\mathrm{N}\,(\mu_1\,,\,\sigma_1^2)$ وليكن S_2^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع $\mathrm{N}\,(\mu_2\,,\,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، فإن:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}\sim F_{\boldsymbol{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}}$$

ملاحظة:

بما أن جداول توزيع فيشر لا تتضمن بعض المساحات الصغيرة فإنه يمكن الاستعانة بالقواعد التالية:

$$-\ F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}=\frac{1}{F_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$$

$$-\ F_{\boldsymbol{p,1,\nu}}=t^2_{1-(p/_2),\nu}$$

$$-\ F_{\boldsymbol{p,\nu},\infty}=\frac{x^2_{1-\alpha,\nu}}{\nu}$$

مثال:

أوجد: $F_{0.05,7,10}$; $F_{0.01,11,15}$; $F_{0.025,11,10}$; $F_{0.95,9,7}$

الحل:

بالنظر إلى جدول فيشر نحصل على ما يلي:

$F_{0.95,9,7}=3.68.$

$F_{0.025,11,10}=0.283.$

$F_{0.01,11,15}=\frac{1}{F_{0.99,15,11}}=\frac{1}{4.25}=0.235.$

$F_{0.05,7,10}=\frac{1}{F_{0.05,10\,,7}}=\frac{1}{3.64}=0.275.$

السلسلة الثانية: توزيع المعاينة (الحلول في حصة الأعمال الموجهة)

التمرين الأول:

- ما هو الفرق بين المعلمة والإحصاءة ؟
- ما هو الفرق بين الخطأ المعياري والانحراف المعياري؟
- هل يمكن أن يكون الانحراف المعياري لمتوسط أو نسبة العينة في حالة المعاينة النفادية هو نفسه في حالة المعاينة غير النفادية؟ علل.

التمرين الثاني:

مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية، اعتمادا على التجارب السابقة فإن مفتش الرقابة على العملية الإنتاجية مقتنع بما يلي:

- متوسط قطر القاعدة الدائرية هو 5 سم.
- الانحراف المعياري لها 0.005 سم.
- توزيع العملية الإنتاجية هو التوزيع الطبيعي.

يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الإنتاجية عند 5 سم، ولتحقيق ذلك تسحب عينات عشوائية بصفة دورية، حجم كل منها 9 كراسي وذلك في محاولة لاكتشاف الانحرافات عن الطبيعية المشار إليها.

أ- حدد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$.

ب- بفرض أن الفاحص سحب عينة عشوائية من 9 كراسي وقيست أقطارها ووجد أن: $\overline{X} = 5.004$ سم.

- ما هي إمكانية (احتمال) أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5.004 سم؟

ج- ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطأ معياري لمتوسط العينة يساوي 0.001؟

د- في الجزء (ج)، لماذا يفضل الفاحص أن يكون الخطأ المعياري لمتوسط العينة يساوي 0.001 على أن يكون الخطأ المعياري كما حصلت عليه في الجزء (أ).

التمرين الثالث:

سجلت إدارة كلية العلوم الاقتصادية بجامعة المسيلة 1000 طالبا في السنة الثانية، وبناء على نتائج السنوات السابقة تبين أن معدلات الطلبة في مادة الإحصاء 3 تتبع التوزيع الطبيعي واقترحت الإدارة أن تكون نسبة الطلبة المتحصلين على المعدل في مادة الإحصاء 60%.

أولا: إذا تم اختيار فوج من قسم علوم التسيير مكون من 30 طالبا.

- فما هو توزيع المعاينة للنسبة في هذا الفوج؟
- ما هو احتمال أن لا تقل نسبة طلبة هذا الفوج المتحصلين على المعدل في هذه المادة على 70 %؟

ثانيا: إذا علمت أن إدارة قسم علوم التسيير والتي يبلغ عدد الطلبة فيها من نفس السنة 300 طالبا تقترح نفس النسبة (60%)، وباعتبار هؤلاء الطلبة يمثلون مجتمعا جديدا.

- أجب على نفس الأسئلة السابقة.
- ما هو تعليقك على النتائج؟

التمرين الرابع:

إذا كانت نسبة النجاح لطلبة السنة أولى في كلية العلوم الاقتصادية هي 85 %، وكانت نسبة النجاح في كلية العلوم الإنسانية هي 80 %، وتم سحب عينة عشوائية حجمها 100 طالب من كلية العلوم الاقتصادية وعينة أخرى حجمها 90 طالبا من كلية العلوم الإنسانية.

- أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في كلية العلوم الاقتصادية عن نسبة النجاح في كلية العلوم الإنسانية بمقدار 10 % على الأكثر.

الفصل الثالث : نظرية التقدير

- ✓ مصطلحات ومفاهيم
- ✓ شروط التقدير الجيد
- ✓ التقدير النقطي
- ✓ التقدير بفترة
- ✓ تمارين محلولة

تمهيد

إن دراسة الباحث للعينات وتوزيعاتها عن طريق إحصاءاتها المحددة يهدف إلى الاستدلال على المعالم المناظرة لها في المجتمع، إلا أن تلك القيم التي يتم الحصول عليها عن طريق المعاينة لا تعكس بالضرورة القيم الحقيقية المناظرة لها فيه، مما يدفع الباحث إلى تقدير تلك المعالم أو المجالات التي تقع ضمنها بدرجة ثقة معينة، ولهذا جاء هذا الفصل ليتناول شروط التقدير الجيد و أنواع التقدير وبعض نظرياته.

1- مصطلحات ومفاهيم

- **التقدير:** هو عملية استنتاج أو تقدير المعلمة من الإحصاءة المناظرة لها
- **التقدير الجيد:** هو ذلك التقدير الأقرب من غيره إلى معلمة المجتمع
- **التقدير المنحاز:** إذا ابتعدت قيمة إحصاءة العينة المقدرة على معلمة المجتمع نقول بأن التقدير متحيز.

2- شروط التقدير الجيد

بصورة عامة فإن المقدر يعتبر جيدا إذا توفر على الخواص التالية:

1- عدم التحيز.
2- الاتساق.
3- الكفاءة.
4- الكفاية.

وفيما يلي شرح لهذه الخواص[1].

1-2 - عدم التحيز: يقال للتقدير $\hat{\theta}$ أنه تقدير غير متحيز للمعلمة θ إذا كانت القيمة المتوقعة للتقدير $\hat{\theta}$ تساوي قيمة المعلمة أي: $\mu_{\hat{\theta}} = \mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$

فمن خلال نظرية توزيع المعاينة وجدنا أن:

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma$$

[1]: - محمد حسين محمد رشيد، منى عطا الله الشويلات، **مرجع سابق**، ص ص (410- 415). بتصرف.
- سليمان محمد طشطوش، **أساسيات الإحصاء الرياضي**، دار اليازوري، دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، عمان الأردن، 2012، ص 137.

$$\overline{X} = \mu_{\overline{X}} = \mu$$

أي أن متوسط توزيع المعاينة للأوساط يساوي متوسط المجتمع. فهو إذن تقدير غير متحيز.

بينما الانحراف المعياري للعينة هو تقدير متحيز للانحراف المعياري للمجتمع، حيث أن: $\sigma \neq \overline{\sigma}$

2-2 - الاتساق: يقال بأن $\hat{\theta}$ مقدر متسق لمعلمة المجتمع إذا كانت $\hat{\theta}$ تؤول إلى θ، (أي تقترب منها) كلما زاد حجم العينة.

فمن علاقة التباين: $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$ نجد بأن تباين العينة يقترب من الصفر عندما يقترب حجم العينة من ما لا نهاية. ولهذا نقول بأن $\sigma^2_{\overline{X}}$ تقدير متسق لتباين المجتمع σ^2.

2-3- الكفاءة: إذا كان لدينا مقدرين $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$ لمعلمة المجتمع θ وكان المقدران غير متحيزين ومتسقين، فإن الاختيار بينهما يكون على أساس التباين الأقل، حيث يتم حساب الكفاءة النسبية عن طريق العلاقة التالية:

$$\text{الكفاءة النسبية} = \frac{var\ (\hat{\theta}1)}{var\ (\hat{\theta}2)}.$$

فإذا كانت قيمة الكفاءة النسبية أقل من الواحد الصحيح فإن $\hat{\theta}_1$ يكون مقدرا ذي تباين أقل من $\hat{\theta}_2$ ويكون هو الأكفأ، وإذا كانت النسبة أكبر من الواحد فإن $\hat{\theta}_2$ يكون هو الأكفأ.

فالتباين الأقل هو الأكثر تركيز وأقل تشتتا وبالتالي هو الأكثر جودة.

2-4- الكفاية: يقال بأن مقدر $\hat{\theta}$ هو مقدر كاف إذا استخدم في حساب قيمته كل معلومات المعلمة θ والتي تتوافر في العينة.

فبالنسبة لمقاييس النزعة المركزية الثلاث: الوسيط والمنوال والوسط الحسابي، نجد أن الوسيط لا يستخدم في حسابه سوى قيم المفردات التي تقع في وسط العينة، كذلك الأمر بالنسبة للمنوال حيث يتم الاعتماد على القيم الأكثر شيوعا عند حسابه، أما الوسط الحسابي فإنه يأخذ بعين الاعتبار كل القيم عند حسابه، ولهذا يعتبر المتوسط الحسابي مقدرا كافيا لمعلمة المجتمع μ.

3- طرق التقدير

يمكن أن نميز بين طريقتين كلاسيكيتين للتقدير وهما التقدير النقطي والتقدير بفترة أومجال.

3-1- التقدير النقطي

وهي أبسط طرق التقدير، وتتمثل في تقدير المعلمة بقيمة واحدة، كأن نقول أن متوسط دخل أفراد أسرة ما هو 30000 دج، فيكون $\overline{X} = 30000$، هو تقدير نقطي لمتوسط المجتمع[1].

مثال 1[2]:

لتقدير عدد الكلمات في أحد الكتب أخذت عينة حجما 10 صفحات عشوائيا من ذلك الكتاب، وتم عد الكلمات فيها، فكان كما يلي:

283، 317، 303، 291، 297، 300، 305، 295، 310، 309.

1. كم تقد وسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة؟
2. إذا كان الكتاب يحتوي على 400 صفحة فكم تقدر عدد الكلمات فيه؟

الحل:

لدينا حجم العينة n = 10 ، أما وسطها فيحسب من العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$.

$$\overline{X} = (283 + 317 + 303 + 291 + 297 + 300 + 305 + 295 + 310 + 309)/10$$

$= 301.$

ومنه يتم تقدير متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة بـ 301 كلمة، أي أن μ=301.

أما عدد كلمات الكتاب فهو: 400 x 301 = 120400.

مثال 2:

من معطيات المثال السابق، قدر نقطيا قيمة الانحراف المعياري.

لقد تم الاعتماد على العلاقة $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ في حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الحسابية، و عند حساب الانحراف المعياري للعينة فيتم الاعتماد على العلاقة:

---

[1]: معتوق أمحمد، **مرجع سابق**، ص 105. بتصرف

[2]: عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة، القاهر، مصر 2009، ص ص (7- 8).

$$S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n}}$$

ولكن عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع فإنه يتم استخدام العلاقة:

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

فلقد تمت القسمة على *n-1* بدل n لأنه تم حساب أحد المقاييس من العينة اللازمة لحساب الانحراف المعياري المقدر، وهذا المقياس هو $\overline{X}$، وبصفة عامة أنه عند تقدير أي مقياس يجب ملاحظة عدد المقاييس التي حسبت من العينة والتي تلزم لحساب ذلك المقياس لأخذه في الاعتبار لتحديد درجات الحرية.

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(283-301)^2 + (317-301)^2 + (303-301)^2 + \cdots (309-301)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{898}{9}} = 9.98.$$

3-2- التقدير بفترة

عموما لا يمكن توقع الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ مهما كان التقدير جيدا، ومع أن دقة التقدير تزداد مع زيادة حجم العينة فإنه لا يوجد ما يبرر إمكانية الحصول على على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ، ولهذا يتم إعطاء مجال أو فترة يُتوقع وجود معلمة المجتمع داخلها، تلك الفترة يطلق عليها فترة التقدير، أو فترة الثقة. فتقدير الفترة إذن يحدد مدى معين من القيم نتوقع أن تقع ضمنه معلمة المجتمع.

3-2-1-تفسير فترة الثقة[1]

تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة (مثل μ) باستعمال العينة، ولذلك نعطي بعض الملاحظات حول طبيعة فترة الثقة، ونكتفي بالشرح عن فترة ثقة 95%.
ولنأخذ المثال التالي:

مثال3: نفرض أننا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه معلوم أي $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma)$.

من جدول التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$P(-1.96 \leq Z \leq +1.96) = 0.96$$

إذن:

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +1.96\right) = 0.95$$

وبعد إجراء العمليات الحسابية وتبسيط هذه العلاقة نجد أن:

$$P(\overline{X}-1.96\, \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\, \sigma/\sqrt{n}) = 0.95.$$

وهكذا نكون قد حددنا طرفي أوحدي المجال الذي يقع ضمنه المتوسط الحسابي للمجتمع، أي أن الحد الأدنى للفترة هو $\overline{X}-1.96\, \sigma/n$ بينما الحد الأعلى لها هو $\overline{X}+1.96\, \sigma/n$.

1- قبل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن:

$$(\overline{X}-1.96\, \sigma/\sqrt{n}\, ,\, \overline{X}+1.96\, \sigma/\sqrt{n})$$

هي فترة نهايتاها متغيرتان عشوائيتان، تمثلان فترة عشوائية تحاول احتواء المعلمة المجهولة μ.

2- إن تفسير الاحتمال :

$$P(\overline{X}-1.96\, \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\, \sigma/\sqrt{n}) = 0.95.$$

على أنه التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن 95% من فترات الثقة ستحوي μ، وأن 5% منها لا تحويها.

---

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، مقدمة في الإحصاء، دار المسيرة، الأردن، ط 2، 2005، ص ص (212 – 214).

3- حالما نحسب المتوسط الحسابي من العينة ونجد قيمته$\overline{X}$ فإن فترة الثقة:

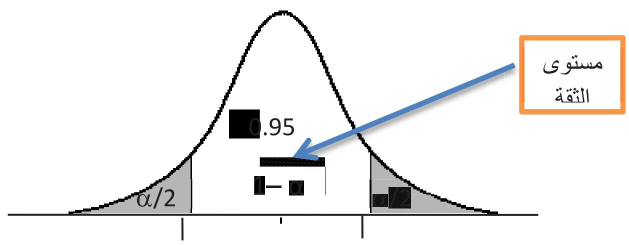
$(\overline{X}$-1.96 $\sigma/\sqrt{n}$, $\overline{X}$+1.96 $\sigma/\sqrt{n})$ تسمى فترة ثقة 95% للمعلمة μ.

4- وعند التطبيق فنحن لا نعلم فيما إذا كانت فترة الثقة 95% التي حصلنا عليها من عينة معينة، تحوي القيمة المجهولة μ أو لا تحويها. ولكن اعتمادا على التكرار النسبي للمحاولات الكثيرة التي أشير إليها في (2) فقد أمكننا استعمال كلمة ثقة بعد حساب الفترة.

وبأخذ هذه الملاحظات في عين الاعتبار فإن تفسير فترة ثقة 95 % للمعلمة μ : إذا أخذنا 100 عينة عشوائية ذات الحجم n وفي كل مرة نحسب $\overline{X}$ ونحسب فترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية، و5 مرات فقط تخطئ μ الحقيقية فلا تحتويها.

ويمكن توضيح مساحة فترة الثقة وحديها في مثالنا هذا بيانيا في الشكل الموالي:

الشكل 3-1: مساحة فترة الثقة وحديها عند مستوى معنوية $1\text{-}\alpha$



ونكتب: $1\text{-}\ \alpha = \text{p} = 0.95 \ \Longrightarrow \ \alpha = 0.05$

أي أن: مستوى المعنوية + مستوى الثقة = 1

ويرمز عادة بالرمز α لمستوى المعنوية وبـ ($1\text{-}\ \alpha$) لمستوى الثقة.

ويمكن كتابة العلاقة التي تحدد فترة الثقة في العبارة التالية:

فترة الثقة = التقدير بنقطة ∓ معامل الثقة x الخطأ المعياري للتقدير

$$\theta = \text{T} \mp C_C\ \sigma_T$$

حيث C_C يدعى معامل الثقة، وفي مثالنا هذا قيمته هي: $Z_{1-\alpha/2}$= 1.96

والجدول الموالي يوضح أهم مستويات الثقة ومعاملاتها في حالة استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير:

الجدول: 3-1: أهم مستويات الثقة ومعاملاتها في حالة استخدام التوزيع الطبيعي

	الرمز	مستويات الثقة			
مستوى الثقة	$1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90
مستوى المعنوية	α	0.01	0.02	0.05	0.10
الاحتمال	$0.5-\alpha/2$	0.495	0.49	0.475	0.45
معامل الثقة	$\mathbf{Z_c = Z_{0.5-\alpha/2}}$	**2.58**	**2.33**	**1.96**	**1.645**

وتلخص خطوات إيجاد حدود فترة الثقة في ما يلي:

1- تعيين مستوى الثقة.
2- استنتاج معاملات الثقة بالنسبة للمستويات الشهيرة مثل: (0.99، 0.95، 0.90)، أما في الحالات الأخرى فيتم حساب المساحة (الاحتمال) بطرح نصف مستوى المعنوية من 0.5 أو 1 وذلك حسب جدول التوزيع الطبيعي المستعمل، وإيجاد قيمة معامل الثقة المقابلة للاحتمال.
3- حساب حدود مجال الثقة.

وسيتم تنفيذ هذه الخطوات عند حساب فترة الثقة في الحالات الموالية:

3-2-2 - فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم

المثال السابق المتعلق بشرح فترة الثقة يندرج ضمن هذه الحالة التي تشتمل على النظرية الموالية :

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$، وكانت σ^2 معلومة.

فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right]$$

حيث:

$\overline{X}$: متوسط العينة.

(1- α): مستوى الثقة.

$Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}$: معامل الثقة.

مثال 4:

شركة مختصة في صناعة العجلات المطاطية تخضع أقطارها للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري 1 سم.

أخذت عينة عشوائية حجمها16 عجلة، فكان الوسط الحسابي لأقطار هذه العجلات هو 40 سم، أوجد فترة ثقة 99 % لمعدل أقطار العجلات التي تنتجها الشركة؟

الحل:

متوسط العينة هو $\overline{X} = 40$. ، ومنه تقدير μ هو 40.

1- مستوى الثقة هو 99%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \ \Longrightarrow 0.5 - 0.005 = 0.4950$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \ {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \ {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[40 - 2.58\,X \ {}^{1}/_{\sqrt{16}} \ ; 40 + 2.58\,X \ {}^{1}/_{\sqrt{16}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: [39.355 ; 40.25]

3-2-3 - فترة الثقة للمتوسط في حالة المجتمعات الكبيرة

نستطيع من خلال النظرية السابقة تقدير فترة الثقة للمتوسط إذا كانت المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم، لكن إذا لم يكن المجتمع خاضعا للتوزيع الطبيعي، فكيف يتم تقدير تلك الفترة؟

إن نظرية النهاية المركزية تعطينا أيضا الحل عندما يتوفر شرط كبر حجم العينة[1]، ولذلك نستطيع استعمال النظرية الموالية:

نظرية: إذا أخذت عينة عشوائية **حجمها** n مجتمع ليس بالضرورة طبيعيا ($N(\mu , \sigma^2)$، وكانت σ^2 معلومة ، وحجم العينة كبير ($n \geq 30$) فإن فترة ثقة ($1-\alpha$) للمعلمة μ هي تقريبا:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}\right] , n \geq 30$$

مثال5 :

أخذت عينة عشوائية حجمها 100، متوسطها الحسابي 52 من مجتمع تباينه 25.

3. أوجد فترة ثقة 98 % لوسط المجتمع μ.

الحل:

متوسط العينة هو $\overline{X} = 52$. ، $n = 100$ ، $1-\alpha = 0.98$. $\sigma^2 = 25$.

المجتمع مجهول التوزيع أي أن: $X \sim ?$

وبما أن حجم العينة أكبر من 30 فسيتم الاعتماد على نظرية النهاية المركزية، ونحصل على تقريب لفترة الثقة كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 98%.

2- $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 0.5 - 0.01 = 0.4900$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.33$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

[1]: د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص ص (84- 85). بتصرف.

$$\left[52 - 2.33\,X\ {}^{5}\!/_{\sqrt{100}}\ ;\ 52 + 2.33\,X\ {}^{5}\!/_{\sqrt{100}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[50.835 ; 53.165]$

3-2-4- فترة الثقة للمتوسط في العينات الكبيرة من مجتمعات مجهولة التباين

غالبا ما يكون تباين المجتمع ^{2} مجهولا وحجم العينة كبيرا، لذلك نستعمل الانحراف المعياري للعينة S بدل الانحراف المعياري للمجتمع[1]، وفي هذه الحالة تكون فترة الثقة:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\ {}^{S}\!/_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\ {}^{S}\!/_{\sqrt{n}}\right]$$

مثال6 :

أخذت عينة من مصابيح كهربائية حجمها 64، ووجد بأن متوسط أعمارها الاقتصادي 800 ساعة بانحراف معياري 40 ساعة. أوجد فترة ثقة 95% لمعدل أعمار المصابيح.

الحل:

لدينا: $n = 64, \overline{X} = 800$; S = 40 ; $1-\alpha = 0.95$. X ~?

بما أن حجم العينة كبير فإنه يمكن الاستناد إلى نظرية النهاية المركزية والاعتماد على الانحراف المعياري للعينة في تحديد مجال الثقة لمتوسط أعمار المصابيح عند مستوى 95% كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 95%.

2- $1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

3- فترة الثقة هي:

---

[1]: سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، مبادئ **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007، ص 284.

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{S}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[800 - 1.96\, X \; {}^{40}/_{\sqrt{64}} \; ; 800 + 1.96\, X \; {}^{40}/_{\sqrt{64}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[790.2 \; ; 809.8]$.

3-2-5- فترة الثقة للمتوسط في العينات الصغيرة من مجتمعات مجهولة التباين

إن تحديد فترة الثقة للمتوسط في العينات الصغيرة والمأخوذة من مجتمعات طبيعية مجهولة التباين يقودنا إلى الحديث على توزيع احتمالي يدعى توزيع ستيودنت.

3-2-5-1- توزيع ستيودنت[1]

عندما يكون حجم العينة صغيرا وتباين المجتمع σ^2 غير معلوم، فإنه لا يمكن تقريب $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ بالتوزيع الطبيعي المعياري، ولكن عندما تكون المعاينة من مجتمع طبيعي فإن توزيع $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ هو توزيع ستيودنت.

تعريف:

توزيع ستيودنت هو أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي في العينات الصغيرة المسحوبة من مجتمعات مجهولة التباين، ودالة كثافته الاحتمالية يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\nu+\frac{1}{2}} \qquad , \qquad -\infty < t < +\infty$$

حيث ν يسمى درجات الحرية، و c ثابت يعتمد على ν ليجعل المساحة تحت المنحني تساوي 1.

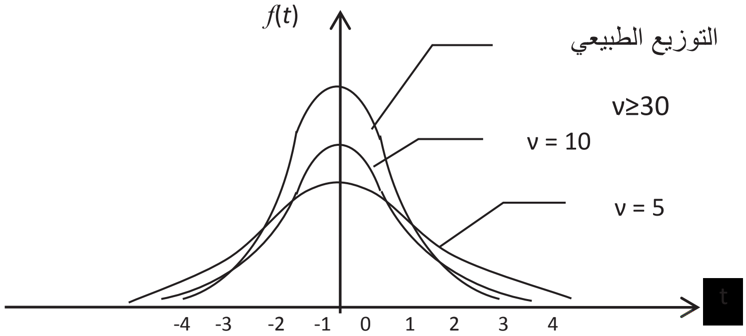
ونكتب: $T \sim t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$

[1]:- محمد حسين محمد رشيد، منى عطا الله الشويلات، **مرجع سابق** ص ص (368- 369) بتصرف.
- معتوق أمحمد، **مرجع سابق**، ص ص (40- 41) بتصرف.

3-2-5-2- خواص توزيع t

1. شكله يشبه الجرس.
2. أحادي المنوال، حيث له قيمة واحدة تقابل $(t = 0)$.
3. شكله يشبه التوزيع الطبيعي إلا أنه منخفض عنه.
4. يتقارب طرفيه من الصفر عندما $t \rightarrow \mp\infty$ ، إلا أنه أبطأ من تقارب طرفي التوزيع الطبيعي.
5. يعتمد توزيع t على حجم العينة، فعندما يقل حجم العينة يزداد ارتفاع منحنى t عن المحور الأفقي، وكلما زاد حجم العينة اقترب طرفي المنحنى من المحور الأفقي، وإذا كان حجم العينة أكبر من أو يساوي 30 فيؤول توزيع t إلى التوزيع الطبيعي والشكل الموالي يوضح ذلك.

الشكل 3-2: تقريب توزيع t إلى التوزيع الطبيعي



أما كيفية إيجاد قيمة t باستخدام توزيع ستيودنت فيتم كما يلي:

1. تحديد درجة الحرية ν انطلاقا من حجم العينة عن طريق العلاقة: $\nu = n - 1$.
2. تحديد مستوى الثقة المراد. $(1\text{-}\alpha)$ واستنتاج المساحة $(1\text{-}\frac{\alpha}{2})$ والبحث عليها في السطر الأفقي أعلى الجدول.
3. التقاطع بين قيمة درجات الحرية ν في العمود الأيسر والمساحة $(1\text{-}\frac{\alpha}{2})$ في السطر العلوي يحددان قيمة t.

وبعد إيجاد القيمة الجدولية لمعامل الثقة $t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$ يتم تحديد فترة الثقة بالاعتماد على النظرية التالية:

نظرية:

إذا أخذت عينة عشوائية صغيرة حجمها n من مجتمع طبيعي فإن فترة ثقة (α -1) للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}\!/\!_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}\!/\!_{\sqrt{n}}\right]$$

$\overline{X}$:المتوسط الحسابي المحسوب من العينة.

n: حجم العينة.

ν: درجة الحرية = n-1.

α: مستوى المعنوية.

S: الانحراف المعياري المحسوب من العينة.

μ: متوسط المجتمع المجهول.

مثال 7:

أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي فوجد أن متوسطها الحسابي 15.5 وانحرافها المعياري 2.4. أوجد فترة ثقة 95% لمعدل المجتمع .

الحل:

لدينا: $n = 16, \overline{X} = 15.5$; $S = 2.4$; $1- \alpha = 0.95$. $X \sim N (\mu, ?)$

مجتمع طبيعي
حجم العينة صغير
تباين المجتمع مجهول

$\Longleftarrow$ المتوسط يخضع لتوزيع ستيودنت أي : $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{1-\frac{0.05}{2};\,16-1}$

1- مستوى الثقة هو 95%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - 0.025 = 0.975$

ومنه معامل الثقة هو: $t_{1-\frac{0.05}{2};\,16-1} = 2.131$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[15.5 - 2.131\ X\ \ {}^{2.4}/_{\sqrt{16}}\ ;\ 15.5 + 2.131\ X\ \ {}^{2.4}/_{\sqrt{16}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[14.221\ ;\ 16.778]$.

مثال 8:

بلغ عدد أفواج طلبة السنة الأولى جذع مشترك في كلية العلوم الاقتصادية 40 فوجا، وكانت معدلات الطلبة لـ 5 أفواج من السنة الأولى جذع مشترك في مادة الإحصاء كالآتي:

10.1، 10.3، 9.9، 9.8، 10.2.

1. قدر نقطيا متوسط معدلات الطلبة للأفواج الخمسة.
2. أوجد فترة ثقة 90% لمعدلات أفواج الطلبة من تلك السنة بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

لدينا: $n = 5, \overline{X} =?\ ;\ S = ?\ ;\ 1-\alpha = 0.95.\quad X \sim N(\mu, ?)$

$$\left.\begin{array}{r}\text{مجتمع طبيعي}\\ \text{حجم العينة صغير}\\ \text{تباين المجتمع مجهول}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

المتوسط يخضع لتوزيع ستيودنت أي : $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{1-\frac{0.10}{2};\,5-1}$

1- التقدير النقطي لمتوسط معدلات الأفواج الخمسة في مادة الإحصاء:

لدينا حجم العينة $n = 5$ ، أما وسطها فيحسب من العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$.

$$\overline{X} = (10.1 + 10.3 + 9.9 + 9.8 + 10.2)/5 = 10.06$$

ومنه يتم تقدير متوسط معدلات أفواج السنة الأولى في مادة الإحصاء بـ 10.06، أي أن μ=10.06.

2- تحديد فترة الثقة:

- تقدير الانحراف المعياري للمجتمع:

عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع فإنه يتم استخدام العلاقة:

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10.1-10.06)^2+(10.3-10.06)^2+(9.9-10.06)^2+(9.8-10.06)^2+(10.2-10.06)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.172}{4}} = 0.207$$

وحيث أن قيمة معدل الاستقصاء هي: $\frac{n}{N} = \frac{5}{40} = 0.125 > 0.05$

فإنه يتم اعتماد معامل الإرجاع في علاقة الانحراف المعياري كما هو موضح في فترة الثقة في الخطوة الثالثة من خطوات تحديد فترة الثقة.

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1-0.05 = 0.95$

ومنه معامل الثقة هو: $t_{1-\frac{0.10}{2};\,5-1} = 2.132$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\,\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\,\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[10.06 - 2.132\,X\,\frac{0.207}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{40-5}{40-1}}\ ;\ 10.06 + 2.132\,X\,\frac{0.207}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{40-5}{40-1}}\right] =$$

$$[10.06 - 2.132\,X 0.092 X 0.947\ ;\ 10.06 + 2.132\,X 0.092 X 0.947\,]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[9.874 ; 10.245]$.

3-3- تقدير النسبة

إن تقدير نسبة وجود خاصية أو صفة في مجتمع ما عادة ما يتم من خلال تقدير نسبة تلك الخاصية أو الصفة في عينة عشوائية مأخوذة منه، فتقدير النسبة أيضا إما أن يكون نقطيا، أو بفترة.

3-3- 1- تقدير النسبة بنقطة

رأينا في الفصل السابق من توزيع المعاينة للنسبة أن نسبة النجاح في العينة تقابل نفس النسبة من النجاح في المجتمع، ولهذا صار تقدير نسبة وجود ظاهرة في مجتمع ما يتم على أساس نسبة وجود تلك الظاهرة في عينة عشوائية مأخوذة من ذلك المجتمع.

فإذا أردنا تقدير نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال في الجامعة الجزائرية فإنه يمكن أن نختار كلية من جامعة ما عشوائيا ثم نقوم بحساب نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال بالكلية، وتستعمل تلك النسبة في العينة كتقدير نقطي للنسبة في الجامعة الجزائرية.

فإذا كانت لدينا عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع برنولي $B(1 , p)$ ، وكانت قيم مفرداتها هي:

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ فإن نسبة النجاح في العينة تكون كما يلي: $p' = \frac{\sum x_i}{n}$.

وتمثل تلك النسبة في العينة التقدير النقطي للنسبة في المجتمع[1].

مثال 9:

لتقدير نسبة المرضى الراضين عن الخدمات المقدمة لهم من الطاقم الطبي في إحدى المستشفيات تمت مقابلة 80 مريضا فوجد من بينهم 50 مريضا عبروا عن رضاهم عن نوع تلك الخدمات .

3- ما هي نسبة المرضى الراضين في ذلك المستشفى؟

الحل:

نسبة المرضى الراضين عن الخدمات الصحية في العينة هي: $p' = \frac{50}{80} = 0.625 = 62.5\%$

ومنه تقدر نسبة المرضى الراضين عن الخدمات الصحية في المستشفى بـ: **62.5%.**

3-3-2- تقدير النسبة بفترة[1]

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مرجع سابق**، ص ص (222-223) .بتصرف.

رغم أن التوزيع الاحتمالي المستعمل في النسب هو التوزيع الثنائي إلا أن كثرة الحسابات وتعقدها عند تحديد فترة ثقة لنسبة المجتمع غير المعروفة جعل العديد من المراجع تلجأ إلى استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي وهذا عندما تكون العينات كبيرة الحجم وعندما لا تكون نسبة النجاح قريبة جدا من الصفر أو الواحد.

والنظرية الموالية توضح ذلك:

نظرية:

إذا كانت $p'=\frac{X}{n}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكانت n كبيرة فإن فترة الثقة $(1-\alpha)$ التقريبية لنسبة النجاح هي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \,;\, p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \right]; (n \geq 30)$$

ملاحظات:

1- إذا كان المجتمع محدودا و ذا حجم N وقيمة معدل الاستقصاء أقل من 0.05 فإنه يتم ضرب قيمة الانحراف المعياري في جذر معامل الإرجاع وتكون عبارة فترة الثقة للنسبة كما يلي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} ; p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

2- إن تقريب التوزيع من الثنائي إلى الطبيعي يؤدي إلى وجود خطأ، ولهذا يُقترح استخدام معامل التصحيح $\frac{1}{2n}$ عند حساب قيمة الاحتمال، بإضافته إلى يمين متراجحة الاحتمال في حالة حساب الاحتمال لما يكون أكبر، وطرحه لمل يكون اتجاه متراجحة الاحتمال أقل.

[1]: شبيزل، شيلر، سرينيفيسان، ترجمة محمد علي عبد الناصر، مصطفى جلال مصطفى، **الاحتمالات والإحصاء**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص 91. بتصرف.

مثال 10 :

أخذت عينة عشوائية حجمها 200 طالبا من كلية العلوم الاقتصادية من قسم الجذع المشترك فوجد أن 40 منهم متحصلون على شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة.

1. قدر نسبة طلبة الجذع المشترك الحاصلين شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة.
2. أوجد فترة ثقة 99 % للنسبة الحقيقية للطلبة الحاصلين على شهادة البكالوريا شعبة علوم الطبيعة والحياة.

الحل:

1- تقدير نسبة طلبة الجذع المشترك الحاصلين شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة:

$$p' = \frac{40}{200} = 0.2 = 20\%$$

2- إيجاد فترة الثقة:

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي وسنتبع نفس الخطوات السابقة في تحديد فترة الثقة كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 99%.

2- $1-\alpha = 0.99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Longrightarrow 0.5 - 0.005 = 0.4950$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \; ; p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[0.2 - 2.58 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}} \; ; 0.2 + 2.58 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}} \right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[0.127 \; ; 0.273]$.

3-3-3- تحديد حجم العينة اللازم لتقدير فترة النسبة P

قبل الشروع في اختيار العينة المناسبة فإنه يجب تحديد الحد الأدنى المطلوب من حجم العينة للحصول على فترة ثقة بطول معلوم أو بخطأ محدد لا نريد تجاوزه.

فعند توفر شروط التقريب للتوزيع الطبيعي فإن طول فترة الثقة هو: $2\ Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$

ويمكن أن نميز بين حالتين[1]:

الحالة الأولى: إذا كانت قيمة النسبة P معلومة

نرمز لقيمة الخطأ المسموح به عند مستوى ثقة (α -1) بالرمز d. ويكون لدينا:

$$Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \leq d \Rightarrow {Z^2}_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\frac{p'(1-p')}{n} \leq d^2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{{Z^2}_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{d^2}p'(1-p')$$

الحالة الثانية: إذا كانت قيمة النسبة P غير معلومة

إذا لم تكن لدين أي فكرة عن قيمة النسبة وأردنا تحديد الحد الأدنى لحجم العينة عند مستوى ثقة (α -1) فإننا نعطي للقيمة $p'(1-p')$ أعظم قيمة لها من خلال أكبر قيمة يمكن أن تأخذها النسبة وهي $p'=\frac{1}{2}$، فتكون أعظم قيمة لـ $p'(1-p')$ هي $\frac{1}{4}$ وبالتالي يتحدد حجم العينة كما يلي:

$$n \geq \frac{{Z^2}_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{4d^2}$$

مثال 11:

نريد تقدير نسبة الطلبة الذين يتم توجيههم إلى السنة الثانية في كلية العلوم الاقتصادية وفقا لرغباتهم،

- ما هو عدد الطلبة الذين يجب اختيارهم كي نكون واثقين بنسبة 98 % أن الخطأ في تقدير هذه النسبة لا يزيد عن 0.04 في كل حالة مما يلي:

[1]: عدنان عوض، **مرجع سابق**، ص ص (23-25). بتصرف

1- إذا لم نكن على علم مسبق عن هذه النسبة.

2- إذا كانت نسبة أولئك الطلبة هي 80%.

الحل:

الحالة الأولى:

لدينا: $1\text{-}\alpha = 0.98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 0.5 - 0.01 = 0.4900$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

كما لدينا أيضا: $d = 0.04$ (نصف طول الفترة)

- بما أن النسبة غير معلومة فإننا نأخذ أسوأ حالة وهي لما تكون قيمتها هي: 0.5.

ويكون عدد الطلبة هو:

$$n \geq \frac{{Z^2}_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{4d^2} \Rightarrow n \geq \frac{1.645^2}{4(0.04)^2}$$

$$\Rightarrow n \geq 164.5$$

$$\Rightarrow n = 165$$

الحالة الثانية:

بما أن النسبة P معلومة فإن حجم العينة يحسب كما يلي:

$$n \geq \frac{{Z^2}_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{d^2} p'(1-p') \Rightarrow n \geq \frac{1.645^2}{0.04^2}\ 0.8(1-0.8)$$

$$\Rightarrow n \geq 270.6$$

$$\Rightarrow n = 271$$

3-4- فترات الثقة حول تباين المجتمع

رأينا فيما سبق عند تقدير المتوسط الحسابي في حالة العينات الصغيرة المأخوذة من مجتمعات مجهولة التباين أن التباين المقدر يكون وفق العلاقة التالية:

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$$

وهذا ما يمهد لدراسة أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة والمتمثل في توزيع كاي تربيع

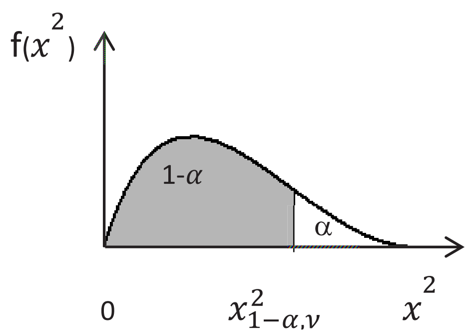
3-4-1- توزيع كاي تربيع[1]

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 وتم حساب تباين توزيع المعاينة S^2 لكل عينة، فإنه يتم الحصول على قيم للإحصاءة S^2 ، ولندرة استخدام توزيع المعاينة لـS^2 في الواقع وبدلا من ذلك سوف نستخدم توزيع المتغير العشوائي x^2 ، ويطلق عليه مربع كاي ، ويمكن حساب قيمته من كل عينة بالمعادلة:

$$x^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

ويطلق على توزيع هذا المتغير توزيع مربع كاي بدرجة حرية $(n-1)$.، حيث يرمز لها بالرمز v وتقرأ (نيو)، والشكل الموالي يوضح منحنى كاي تربيع:

الشكل 3-3: منحنى كاي تربيع



ولإيجاد المساحات تحت المنحنى أو إيجاد القيم التي يقع إلى يسارها أو يمينها مساحة معينة نستعمل جدول كاي تربيع حيث يمثل العمود الأيسر درجات الحرية والخط الأفقي المساحات إلى يسار قيمة كاي تربيع، أما قيم كاي تربيع فهي في داخل الجدول، ونستخدم التعبير $x^2_{1-\alpha,\nu}$ ليعبر عن قيمة كاي تربيع عند مستوى ثقة $(1-\alpha)$ بدرجة حرية v.

[1]: جورج كانافوس، دون ميلر، ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني، **مرجع سابق**، ص ص (302-305). بتصرف.

3-4-2- خواص توزيع كاي تربيع

يلاحظ بأن المتغير X^2 لا يمكن أن يكون سالبا، وبالتالي لا يمتد إلى يسار الصفر وإذا كانت درجات الحرية أكبر من 2 فإن لتوزيع x^2 منوال واحد ويكون ملتويا نحو اليمين وكلما زادت درجات الحرية قل الالتواء.

مثال 12:

إذا كان x^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع في عينة حجمها 16، أوجد:

1. قيمة X^2 التي يكون إلى يسارها 0.95 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.95$.
2. قيمة X^2 التي يكون إلى يمينها 0.05 من المساحة. أي: $p(X^2 > x^2) = 0.05$.
3. قيمة X^2 التي يكون إلى يسارها 0.99 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.99$.
4. قيمة X^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.01$.

الحل:

$$\text{N} = 20 \Longrightarrow \nu = 20 - 1 = 19$$

فدرجة الحرية إذن هي 19 أما قيم كاي تربيع في كل حالة هي كما يلي:

1. قيمة X^2 التي يكون إلى يسارها 0.95 من المساحة هي: $x^2_{0.95\,,19} = 30.144$
2. قيمة X^2 التي يكون إلى يمينها 0.05 من المساحة هي نفسها قيمة كاي تربيع إلى يسار 0.95.أي أن $\big(p(X^2 > x^2) = 0.05\big) = \big(p(X^2 \le x^2) = 0.95\big)$.

   ونكتب أيضا: $x^2_{0.95\,,19} = 30.144$
3. قيمة X^2 التي يكون إلى يسارها 0.99 من المساحة هي: $x^2_{0.99\,,19} = 36.191$
4. قيمة X^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة هي نفسها قيمة كاي تربيع إلى يسار 0.99.أي أن $\big(p(X^2 > x^2) = 0.01\big) = \big(p(X^2 \le x^2) = 0.99\big)$.

ونكتب أيضا: $x^2_{0.99\,,19} = 36.191$

نظرية

إذا كانت $X_1 , X_2 , X_3 , \dots X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإن فترة ثقة $(1- \alpha)$ هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

حيث: S^2 هو تباين العينة أي: $S^2 = \sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2/n-1$.

ملاحظة:

لإيجاد فترة ثقة $(1- \alpha)$ للتباين ^{2} في النظرية السابقة، نجد أن من جدول توزيع x^2 أن النقطتين $x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ ، $x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ تحصران بينهما مساحة $(1- \alpha)$ تحت توزيع x^2 بدرجة حرية $(n-1)$،

أي أن:

$$P\left(x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\alpha$$

وبعد القيام بالعمليات الرياضية والتبسيط الجبري على المقدار نجد:

$$x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$$

نأخذ مقلوب المتباينة فيكون عندنا:

$$\frac{1}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

وبعد الضرب في $(n-1)S^2$ نحصل على:

$$\frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

مثال 13:

أخذت عينة عشوائية حجمها 10 فوجد أن متوسطها الحسابي 0.7 وانحرافها المعياري 0.4 ، أوجد فترة ثقة 90% للانحراف المعياري.

الحل:

n= 10. S= 0.4. 1-$\alpha = 0.90$

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0.05 \\ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \end{cases}$$

ومنه قيمتي كاي تربيع عند درجة حرية $(10-1)$ هما:

$$\begin{cases} {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = {x^2}_{0.95\,;9} = 16.91 \\ {x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1} = {x^2}_{0.05\,;9} = 3.325 \end{cases}$$

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{{x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{{x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[\frac{(10-1)0.4^2}{16.91} \leq \sigma^2 \leq \frac{(10-1)0.4^2}{3.325}\right]$$

أي أن: تباين المجتمع محصور بين: $[0.085\ ,\ 0.433]$.

ومنه فترة ثقة 90% للانحراف المعياري للمجتمع هي: $[0.29\ ,\ 0.66]$.

3-5- فترات الثقة للنسبة بين تباينين[1]

إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ عينة عشوائية من مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للنسبة σ_1^2/σ_2^2 هي :

[1]: - سليمان محمد طشطوش، **أساسيات الإحصاء الرياضي**، دار اليازوري، دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، عمان الأردن، 2012، ص 137.
- عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، **الاستدلال الإحصائي (1) نظرية التقدير**، مجموعة النيل العربية، مصر، 1999، ص ص (350- 351). بتصرف.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_2,\nu_1}$$

مثال 14:

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع $N(\mu_1 , \sigma_1^2)$ فأعطت التباين $S_1^2 = 18$ وأخذت عينة عشوائية حجمها 11 من مجتمع $N(\mu_2 , \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فأعطى التباين $S_2^2 = 12$.

أوجد فترة ثقة 90 % للنسبة σ_1^2/σ_2^2 .

الحل:

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1 - 0.05 = 0.95$

وبالنظر إلى جدول فيشر نستخرج القيم التالية :

$F_{0.95,8,10} = 3.07$; $F_{0.95,10,8} = 3.35$

3- فترة الثقة هي:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_2,\nu_1}$$

وبعد التعويض نجد:

$$\frac{18}{12}.\frac{1}{3.07} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{18}{12}.3.35$$

أي أن فترة الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هي: $[0.488 ; 5.02]$.

4- تمارين السلسلة الثالثة: نظرية التقدير (الحلول في حصة الأعمال الموجهة)

- **التمرين الأول**

أجب عن الأسئلة الموالية:

أ- فيم يتجلى الفرق بين التقدير النقطي والتقدير بفترة ؟

ب- ما هي شروط التقدير الجيد ؟

ج- متى يتم استخدام توزيع ستيودنت لإيجاد فترة الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم؟ وماهي الحالة التي يمكن فيها استخدام التوزيع الطبيعي رغم مجهولية تباين المجتمع ؟

د- ماذا يقصد بدرجات الحرية ؟ وضح بمثال.

- **التمرين الثاني**

مجتمع طبيعي حجمه 800 وتباينه 625، تم سحب عشوائية منه حجمها 25 فكان وسطها هو 100.

أ- أوجد فترات الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم عند المستويات التالية: 90%، 95%، 99%.

ب- ما هو طول الفترة في كل حالة مما سبق؟

ج- ما هو تعليقك على النتائج الثلاث؟

- **التمرين الثالث**

ترغب إدارة جامعة المسيلة في تقييم جودة التعليم من منظور الأساتذة البالغ عددهم 1389 أستاذا، حيث قامت خلية جودة التعليم بالجامعة بتوزيع 100 استمارة ذات سلم ليكارت الخماسي على عينة عشوائية من الأساتذة فوجد أن متوسط العينة هو 2.85 بانحراف معياري 1.05 .

4- أوجد فترة ثقة 95 % لوسط أساتذة الجامعة غير المعلوم.

- **التمرين الرابع**

شركة مختصة في نقل المسافرين تريد تقدير المدة المستغرقة من طرف حافلاتها في خط محدد فقامت بمعاينة عشوائية لإحدى الحافلات وتم تسجيل الفترات التي تقضيها خلال كل رحلة بالدقائق، فكانت كما يلي:

100، 102، 98، 96، 103، 104، 97، 92.

1- قدر نقطيا معدل الفترة التي تستغرقها حافلاتها خلال الرحلة.

2- قدر نقطيا الانحراف المعياري للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة.

3- بافتراض أن فترات الرحلات تتبع التوزيع الطبيعي، أوجد فترة ثقة 90 % لمعدل فترة جميع الرحلات التي تقضيها حافلاتها من نفس الخط.

- **التمرين الخامس**

في عينة عشوائية حجمها 144 عاملا من مصنع به 3600 عاملا، وجد أن 94 عاملا يفضلون التقاعد المسبق .

أ- أوجد فترة ثقة 95 % لنسبة العاملين الذين يفضلون التقاعد المسبق.

ب- إذا كنا نرغب في الحصول على نصف طول فترة الثقة السابقة فما هو حجم العينة المناسب لنفس المعطيات.

- **التمرين السادس**

تريد إدارة مصنع لافارج التحكم في جودة الإنتاج من خلال ضبط أوزان أكياس الإسمنت ودراسة التغيرات التي قد تطرأ على أوزان الأكياس المختلفة، فقامت بأخذ عينة من الأكياس حجمها 100 كيسا، حيث وجدت أن الانحراف المعياري لها هو 0.7 كغ .

المطلوب : إيجاد فترة ثقة 90 % للانحراف المعياري لأوزان أكياس الإسمنت بالمصنع.

الفصل الرابع : اختبار الفرضيات

- ✓ مصطلحات ومفاهيم
- ✓ عناصر الاختبار الإحصائي
- ✓ خطوات اختبار الفرضيات
- ✓ اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط
- ✓ اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة
- ✓ اختبار الفرضيات المتعلقة بالتباين
- ✓ تمارين محلولة

تمهيد

رأينا في الفصل السابق المتعلق بموضوع التقدير أن الباحث لا تكون لديه معلومات عن معلمة المجتمع التي يريد تقديرها نقطيا أو ضمن مجال بمستوى ثقة محدد فيلجأ إلى شواهد ومعلومات من العينة لتحديد تلك التقديرات المختصة بالمعالم.

وفي هذا الفصل سيتم تناول موضوع اختبار الفرضيات الذي يعتبر أحد فروع الإحصاء الاستنتاجي الذي يهدف إلى اتخاذ القرار بشأن القيمة المعلنة أو المختبرة لمعلمة المجتمع من خلال فحص فرضيات حولها انطلاقا من الشواهد والأدلة التي تقدم من العينة.

1- مصطلحات ومفاهيم[1]

- **الفرضية الإحصائية:** الفرضية الإحصائية هي عبارة حول معلمة أو أكثر من معالم المجتمع الإحصائي تكون قابلة للاختبار وبالتالي تكون صحتها أو عدم صحتها بحاجة إلى قرار.
- **اختبار الفروض:** يشير اختبار الفروض إلى قبول أو رفض ما عن خاصية غير معلومة للمجتمع مثل أحد المعالم أو شكل توزيع المجتمع.
- **المنطقة الحرجة:** هي مجموعة قيم إحصاء الاختبار التي تؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية ، حيث أن كل حد من حدود المنطقة الحرجة يسمى قيمة حرجة لإحصاء الاختبار.
- **مستوى الدلالة (مستوى المعنوية):** هو احتمال رفض فرضية صفرية، وهو صحيح ويرمز له بالرمز α فعند استخدامنا لمستوى دلالة 0.05 (5 %) فهذا يعني أننا سوف نرفض الفروض عندما يجب أن نقبله وأننا سوف نكون واثقين بنسبة 95 % في أننا سنتخذ القرار السليم.

2- عناصر الاختبار الإحصائي

إن اختبار أي فرضية إحصائية يشتمل على مجموعة من العناصر تتمثل فيما يلي:

2-1- الفرضية الصفرية (فرضية العدم)

وهي التي تصاغ بشكل نفي وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر لمتغير مستقل على آخر تابع، وهي الفرضية التي يجري عليها الاختبار الإحصائي ويبنى القرار على عدم صحتها. ويرمز لها بالرمز: H_0[1].

[1]:- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مرجع سابق**، ص 233.
- د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **مرجع سابق**، ص ص (103- 104).بتصرف.

مثال 1:

- ✓ لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية في استخدام تكنولوجيا المعلومات تعزى لحجم المؤسسة.
- ✓ لا توجد علاقة بين ترويج مبيعات المؤسسة الكترونيا و ارتفاع المبيعات.
- ✓ لا يوجد أثر ذو دلالة إحصائية لاستخدام تكنولوجيا المعلومات على تطوير استراتجية الترويج بالمؤسسة محل الدراسة.

2-2- الفرضية البديلة

وهي المعاكسة للفرضية الصفرية والتي يدعمها الباحث حيث تصاغ بشكل وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر لمتغير مستقل على آخر تابع. ويرمز لها بالرمز: $\boldsymbol{H_1}$.

فعدم تحقق الفرضية الصفرية H_0 يؤدي إلى رفضها وبالتالي قبول الفرضية البديلة $\boldsymbol{H_1}$.

مثال 2:

- ✓ توجد فروق ذات دلالة إحصائية في استخدام تكنولوجيا المعلومات تعزى لحجم المؤسسة.
- ✓ توجد علاقة بين ترويج مبيعات المؤسسة الكترونيا و ارتفاع المبيعات.
- ✓ يوجد أثر ذو دلالة إحصائية لاستخدام تكنولوجيا المعلومات على تطوير استراتجية الترويج.

مثال حول الفرضية الصفرية والبديلة:

إذا كان معدل الطلبة في مادة الإحصاء هو 10 وأردنا اختبار معدل عينة من أولئك الطلبة من أجل اتخاذ قرار يتعلق بمعدلاتهم في مادة الإحصاء، فإن الفرضيات تصاغ كما يلي:

الفرضية الصفرية: $H_0: \mu = 10$

أما الفرضية البديلة فإنها يمكن أن تأخذ ثلاثة أشكال، وذلك حسب ما يقترحه الباحث :

$$H_1: \begin{cases} \mu \neq 10 \\ \mu > 10 \\ \mu < 10 \end{cases}$$

[1]: محمد خير سليم أبو زيد، **التحليل الإحصائي للبيانات باستخدام برمجية SPSS**، دار جرير، دار صفاء، عمان، الأردن، 2010، ص 241. بتصرف

ففي الفرضية الصفرية يقترح الباحث عدم وجود فروق بين معدل العينة في مادة الإحصاء والمعدل العام للطلبة في هذه المادة، بينما الفرضية البديلة تتضمن وجود فروق (اختلاف) بين معدل الطلبة في العينة والمعدل العام، او أن المعدل أكبر من 10 ، أو أقل من 10.

2-3- إحصاء الاختبار

هو إحصاء (اقتران تعين قيمته من العينة)، أي يتم حساب قيمته من خلال بيانات العينة مثل: (الإحصائي Z، والإحصائي t، والإحصائي F)، وتستخدم قيمته إلى الوصول إلى قرار رفض أو قبول الفرضية الصفرية H_0 ، واختيار إحصائي الاختبار يعتمد على شكل التوزيع والفرضيات المفحوصة[1].

2-4- منطقة اتخاذ القرار

تقسم منطقة اتخاذ القرار إلى منطقتين، إحداهما تحوي القيم التي تدعم الفرضية البديلة وتسمى منطقة الرفض (المناطق الحرجة)، وهي مجموعة من القيم التي نستخدمها والتي تمكننا من رفض الفرضية الصفرية، وحدودها يطلق عليها القيم الحرجة، وهي قيم تناظر مستوى الدلالة، والتي تمثل أعلى احتمالية لرفض الفرضية الصفرية وهي صحيحة صدفة.

والمنطقة الأخرى تحتوي على القيم التي تدعم الفرضية الصفرية وتسمى منطقة القبول، فوقوع قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض يؤدي إلى رفض فرضية العدم وبالتالي قبول الفرضية البديلة[2].

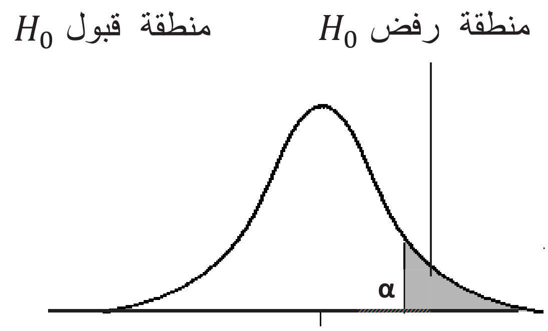
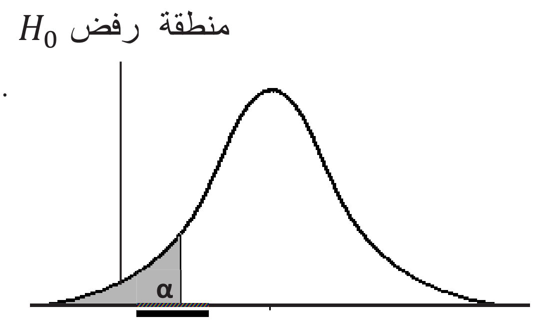
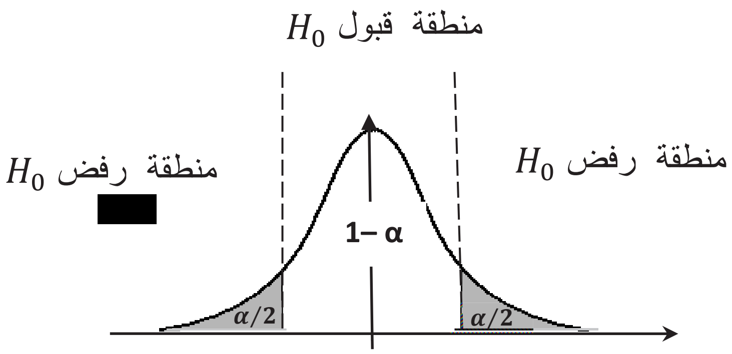
فمنطقة الرفض إذن تتضمن قبول الفرضية البديلة والتي يعبر عنها إما باتجاه واحد على اليمين أو على اليسار، أو باتجاهين على جانبي القيمتين الحرجتين.

والشكل الموالي يوضح منطقتي الرفض والقبول للفرضية الصفرية H_0 في الحالات الثلاث:

[1]: سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، **مرجع سابق**، ص 300.بتصرف

[2]: المرجع نفسه، ص 298. بتصرف

الجدول 4-1: منطقتا الرفض والقبول للفرضية الصفرية 0 في الحالات الثلاث

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين</td>
<td>منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">منطقتا القبول والرفض في حالة الاختبار ثنائي الاتجاه.</td>
</tr>
</table>

2-5- الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

كل قرار يبني على نتائج عينة يكون معرضا للخطأ، وفي اختبار الفرضيات هناك حالتان بالنسبة للفرضية الصفرية هما: إما أن تكون صحيحة، وإما تكون غير صحيحة، كما أنه يوجد نوعان من القرارات المتخذة من طرف الباحث بشأن الفرضية الصفرية، هما: رفض الفرضية الصفرية أو عدم

رفضها، وهذا ما يجعل اتخاذ القرار ينطوي على نوعين من الأخطاء في اختبارات الفروض الإحصائية يتمثلان فيما يلي[1]:

2-5-1-**الخطأ من النوع الأول:** هو الخطأ الذي يحدث عند رفض فرضية العدم عندما تكون صحيحة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الأول يرمز له بالرمز α، فالاسم البديل للخطأ من النوع الأول هو مستوى المعنوية

2-5-2-الخطأ من النوع الثاني: هو الخطأ الذي يحدث عند قبول (عدم رفض) فرضية العدم عندما تكون خاطئة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الثاني يرمز له بالرمز β.

والجدول الموالي يوضح هذين النوعين من الأخطاء:

الجدول 4-2: الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

واقع الفرضية / القرار	صحيح	خاطئ
رفض H_0	خطأ من النوع الأول α	قرار صحيح $1-\beta$
قبول H_0	قرار صحيح $1-\alpha$	خطأ من النوع الثاني β

ويشار إلى أن تصغير الخطأ من النوع الأول يترتب عليه زيادة في الخطأ من النوع الثاني، ولتخفيض كل من α و β يتم زيادة حجم العينة.

2-6- قوة إحصاء الاختبار

ذكرنا بأنه في حالة قبولنا لفرضية العدم H_0 وهي غير صحيحة سيؤدي إلى وقوعنا في الخطأ من النوع الثاني، ويعتبر هذا القرار غير سليم، أما القرار السليم فهو عند رفض فرضية العدم H_0 لما تكون خاطئة، وهنا تتجلى قوة الاختبار.

[1]: عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **الأساليب الإحصائية التطبيقية**، دار الشروق للنسر والتوزيع، عمان، الأردن، 2004، ص 282.

فقوة الاختبار إذن تقاس بمدى قدرته على رفض الفرضية الصفرية لما تكون هذه الأخيرة خاطئة.

وعلى هذا الأساس فإن هذا الاحتمال فإن احتمال الوقوع في الخطأ الثاني يعتمد على الابتعاد من H_0، وأيضا على حجم العينة n والانحراف المعياري σ وعلى مستوى المعنوية α ونوع الاختبار إن كان من جانب واحد أو من جانبين[1].

مثال 3:

نريد اختبار الفرضية:

$$H_0: \mu = 25 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu \neq 25$$

عند مستوى معنوية 0.05 وباستعمال الوسط الحسابي لعينة حجمها 100 أخذت من مجتمع انحرافه المعياري 12.

المطلوب:

- إيجاد احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني β عندما يكون $\mu = 25.6$: .

الحل: المطلوب حساب:

$$\beta = P\left(H_0 \text{ عدم رفض } / \ H_1 \text{صحيحة} \right)$$

الخطأ المعياري لمتوسط العينة $\bar{X}$: $S_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = 1.2$

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يمكن الاعتماد على نظرية النهاية المركزية وبالتالي استعمال Z.

فعند مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ نرفض H_0 عندما يقع $\bar{X}$ خارج المجال: $25 \pm 1.96 \times 1.2$

أي أن قرارعدم رفض H_0 هو: $\begin{cases} \bar{X} > 22.648 \\ \bar{X} < 27.352 \end{cases}$

إذن:

$$\beta = P\left(H_0 \text{ عدم رفض } : \ H_1 \text{صحيحة} \right) \Longrightarrow$$

[1]: **المرجع نفسه**، ص ص (285- 286). بتصرف

$$\beta = P\,(\,22.648 < X < 27.352\,) \Rightarrow$$

$$\beta = P\,(\,\frac{22.648 - 25.6}{1.2} < Z < \frac{27.352 - 25.9}{1.2}\,) \Rightarrow$$

$$\beta = P\,(\,-2.46 < Z < 1.46\,) = 0.4931 + 0.4279 = 0.921$$

نلاحظ أن قيمة احتمال الوقوع في الخطأ الثاني β جاءت مرتفعة جدا لأن القيمة 25.6 في الفرضية البديلة قريبة جدا من القيمة 25 في الفرضية الصفرية.

3- خطوات اختبار الفرضيات

يتم اختبار الفرضيات كأسلوب إحصائي من خلال الخطوات التالية[1]:

3-1- صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

في هذه الخطوة يركز الباحث على اتجاه الاختبار ليتمكن من صياغة الفرضية البديلة، فالفرضية الصفرية عادة ما تأخذ شكل المساواة في حين أن الفرضية البديلة تأخذ أشكالا مختلفة ويتحدد اتجاهها من خلال القراءة الجيدة للمشكلة وتحديد الاتجاه عن طريق العبارات التي تتضمنها مثل:

- تختلف، لا تساوي، ...
- تزيد، أكبر من، أعلى من، تفوق، تتجاوز...
- تنقص، أقل من، أدنى، لا تفوق، لا تتجاوز،...

3-2- تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

يساعدنا مستوى الدلالة α (وهي قيمة الخطأ من النوع الأول) في تحديد النقاط الحرجة وبالتالي تحديد مناطق الرفض للفرضية الصفرية من خلال رسم المنحنى، حيث يعبر عن الاحتمال α بيانيا بمنطقة الرفض لفرضية العدم H_0 في حالة الاختبار أحادي الاتجاه، فتضلل مساحة واحدة على اليمين أو على اليسار حسب اتجاه الاختبار، أو تضلل المساحتين $\frac{\alpha}{2}$ على جانبي منطقة قبول فرضية العدم H_0.

---

[1]: - سليمان محمد طشطوش، **مرجع سابق**، ص ص (163-164). بتصرف.
- سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، **مرجع سابق**، ص ص (298- 301). بتصرف.

3-3- تحديد قاعدة القرار

تعتمد قاعدة القرار على تحديد طبيعة الإحصاءة بناء على طبيعة التوزيع، فبعد معرفة طبيعة التوزيع تتحدد طبيعة الإحصاءة مثل (الإحصائي Z، والإحصائي t، والإحصائي F) ثم يتم تحديد قاعدة القرار من خلال المجال الذي يتحدد بناء على نوع الاختبار الإحصائي.

3-4- حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار

تستنتج القيمة الجدولية للإحصاءة بالاعتماد على الجداول الإحصائية المتوفرة (جدول التوزيع الطبيعي، جدول توزيع ستيودنت، جدول فيشر، ...)

أما القيمة الفعلية فتحسب انطلاقا من المعطيات المتوفرة في المسألة.

3-5- المقارنة واتخاذ القرار

مقارنة القيمتين الجدولية والمحسوبة واتخاذ القرار إما برفض الفرضية الصفرية في حالة عدم انتماء القيمة المحسوبة لمجال قبول فرضية العدم وبالتالي قبول الفرضية البديلة، أو بقبولها في حالة العكس.

4- اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط

رأينا بأن اختبار الفرضيات يتوقف على اتجاه الفرضية البديلة، إما أن تكون متجهة لليمين فيكون اختبار أحادي الاتجاه لليمين أو كما يطلق عليها الفرضية البديلة ذات الذيل الأعلى، وإما أن تكون متجهة نحو اليسار فنكون بصدد اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، أو كما يطلق عليها الفرضية البديلة ذات الذيل الأدنى، وإما أن تكون الفرضية البديلة غير موجهة فيكون الاختبار ثنائي الاتجاه، وفي هذا المبحث سيتم تناول هذه الأنواع.

4-1- الاختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 4 :

وجد في دراسة سابقة أن معدل حضور الطلبة للمحاضرات بإحدى كليات جامعة المسيلة هو 70 طالبا، وأن توزيعها يقترب من التوزيع الطبيعي.

نريد اختبار فرضية أن معدل الحضور قد تغير خلال هذا الموسم، فتم اختيار 81 طالبا عشوائيا فوجد أن معدل الحضور هو 73 طالبا بانحراف معياري قدره 10 طلاب.

- باستعمال مستوى دلالة 0.05 هل تؤيد تلك الفرضية؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

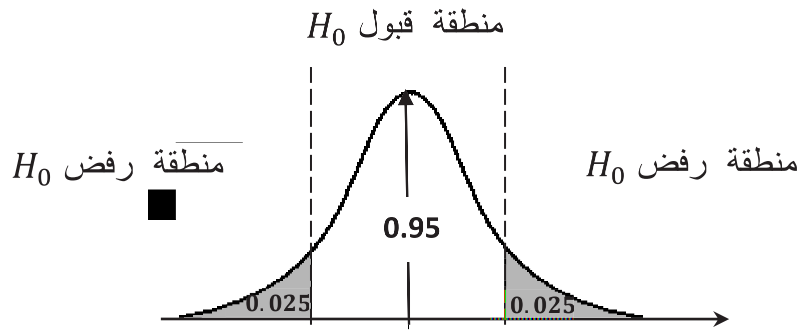
بما أن المسألة لم تتضمن اتجاه محدد للتغير، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 70 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu \neq 70$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبارثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-1: منطقة الرفض في حالة الاختبار ثنائي الاتجاه عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما توزيع المجتمع طبيعي فإننا سنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبارثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

$$\Rightarrow Z_{0.5-\alpha/2} = 1.96$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\boldsymbol{Z_C} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{73 - 70}{10/\sqrt{81}} = 2.7$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $2.7 > 1.96$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} > +Z_{0.5-\alpha/2}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة على أساس أن معدل الحضور قد تغير هذا الموسم.

2-4- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 5:

بلغ معدل تسجيل مترشحي البكالوريا في كلية العلوم الاقتصادية بجامعة المسيلة 11.5 وفي السنوات الأخيرة زاد الطلب على التسجيل في هذه الكلية فرفعت الإدارة معدل القبول للدراسة بها.

تم اختيار عينة عشوائية من الطلبة المسجلين بالكلية هذا العام حجمها 49 طالبا فأعطى معدل التسجيل 11.80 بانحراف معياري 1.5 .

- قم باختبار الفرضية التي تقول بأن معدل القبول قد ارتفع عند مستوى معنوية 5 %.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

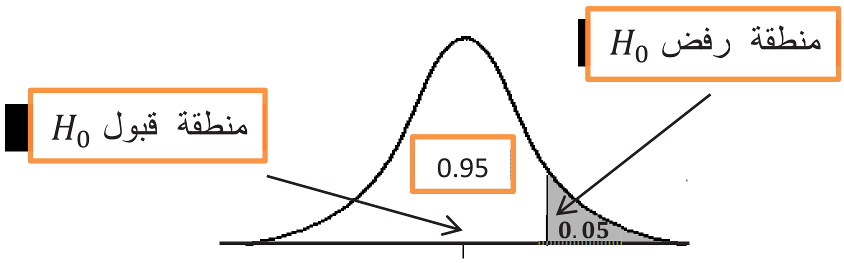
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا و هو ارتفاع معدل قبول التسجيل بالكلية ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 11.5 \longleftrightarrow H_1: \mu > 11.5$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-2: منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ Z_C > +Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \Rightarrow 0.5 - 0.05 = 0.4500$$

$$\Rightarrow Z_{0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{11.80 - 11.50}{1.5/\sqrt{49}} = 1.4$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $1.4 < 1.645$ أي أن : $Z_C < +Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفريةH_0 ورفض الفرضية البديلة على أساس أن معدل التسجيل بالكلية لم يرتفع.

4-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 6:

لاحظت إدارة محطة بنزين أن معدل فترة انتظار السيارة للتزود بالوقود هو 4 دقائق، وأرادت أن تقلص من هذه الفترة فقامت بإعادة تنظيم صفوف الانتظار، فأخذت عينها حجمها 9 سيارات وبعد أن دونت فترات الانتظار وجدت أن معدل فترات الانتظار هو 3 دقائق بانحراف معياري 30 ثانية.

المطلوب : اختبر قرار إدارة المحطة لتخفيض فترات الانتظار عند مستوى معنوية 0.01 بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

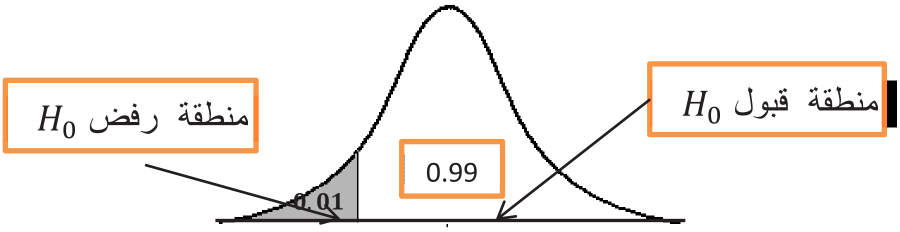
بما أن الإدارة تهدف إلى تخفيض فترة انتظار السيارة للتزود بالوقود ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أصغر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 4 \longleftrightarrow H_1: \mu < 4$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدمH_0)**

مستوى الدلالة هو 0.01، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليسار كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-3: منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار عند مستوى معنوية 0.01



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

المجتمع طبيعي التوزيع وحجم العينة صغير (أقل من 30) وتباين المجتمع مجهول وبالتالي فإن المتغيرة تتبع توزيع ستيودنت وستحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة t ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} t_C \geq -t_{0.99,10-1} & \Rightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ t_C < -t_{0.99,10-1} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار t**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \Rightarrow 1 - 0.01 = 0.99$$

$$\Rightarrow -t_{0.99,10-1} = -2.821$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$t_C = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{3-4}{0.5/\sqrt{9}} = -6.02$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : -6.02 > -2.821 أي أن : $t_C < -t_{0.99,10-1}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة على أساس أن القرار بإعادة تنظيم صفوف الانتظار أدى إلى تخفيض فترات انتظار السيارات للتزود بالبنزين.

5- اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة

إن الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي هي نفسها التي سيتم استخدامها في اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة، حيث نهتم بدراسة النسبة $\acute{p}$ ، وهي النسبة في العينة التي تملك الخاصية المطلوبة.

وكما ذكرنا آنفا أن توزيع المعاينة للنسبة يتبع إما التوزيع الثنائي أو التوزيع الهندسي الزائد، لكن عندما يكون حجم العينة كبيرا ومع توفر الشروط ($n.p > 5$, $n.q > 5$) ، وبالاعتماد على نظرية النهاية المركزية فإنه يمكن تقريب توزيع المعاينة للنسبة من التوزيع الطبيعي.

لذلك سوف نستخدم التوزيع الطبيعي دائما في اختبار الفرضيات حول النسبة (P). وتكون قيمة الإحصاءة Z كما أشرنا لها في فصل توزيع المعاينة كما يلي:

$$Z = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

أما الفرضية الصفرية فتكون كما يلي: $H_0: P = p_0$

في حين أن الفرضية البديلة تأخذ الحالات الثلاث كما رأينا في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط، وذلك حسب نوع الاختبار، تبعا لذلك يتم استخراج قاعدة القرار كما يلي:

الجدول 4-3: قاعدة القرار لاختبار النسبة في الحالات الثلاث

نوع الاختبار	الفرضية البديلة	قاعدة القرار
أحادي الاتجاه من اليمين	$H_1: P > p_0$	$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ \boldsymbol{Z_C} > +Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$
أحادي الاتجاه من اليسار	$H_1: P < p_0$	$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} > -Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ \boldsymbol{Z_C} \leq -Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$
ثنائي الاتجاه	$H_1: P \neq p_0$	$\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha/2} \Rightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$

مثال 7:

أبدت إدارة التسويق في مؤسسة ما فكرا جديدا يسمى " البيع بروح الفريق " وفيه تستخدم الهاتف في عرض السلع على الزبائن قبل البيع، يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 18 %، وهي نسبة البيع الحالية والمحققة، ارتأت الإدارة أن تستخدم فريق البيع ولكن في البداية اشترطت أن تكون نسبة مكالمات البيع الناجحة يجب أن تتعدى النسبة الحالية للمبيعات.

- في اختبار ما ، جرب فريق البيع مع عينة من 100 مكالمة بيع نجح في إتمام 22 عملية بيع
- هل هذه العينة تظهر أن هناك تحسنا قد حدث مع فريق البيع عند مستوى معنوية 0.05 ؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

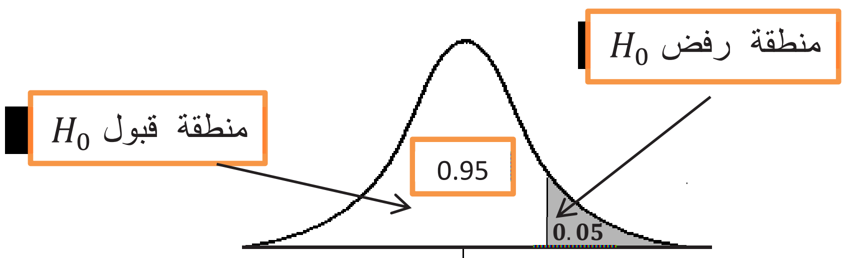
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو زيادة نسبة مكالمات البيع الناحجة ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mathrm{P} = 0.18 \longleftrightarrow H_1: \mathrm{P} > 0.18$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-4: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} > +Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \Longrightarrow 0.5 - 0.05 = 0.4500 \Longrightarrow Z_{0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.22 - 0.18}{\sqrt{\frac{0.18(1-0.18)}{100}}} = 1.05$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $1.05 < 1.645$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} < +Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفرية H_0 ورفض الفرضية البديلة أي أن الفكر الجديد في البيع المنتهج من قبل إدارة التسويق لم يؤد إلى تحسن حقيقي.

مثال 8:

توصلت دراسة بإحدى الجامعات أن 40 % من الطلبة يغيرون تخصصاتهم بعد السنة الأولى من تسجيلهم ولقد تم أخذ عينة عشوائية من 100 طالب وتبين أن 38 طالبا غيروا تخصصهم بعد تلك السنة.

فهل يمكن الادعاء بأن هناك انخفاض معنوي في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم عند مستوى معنوية 10 %.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

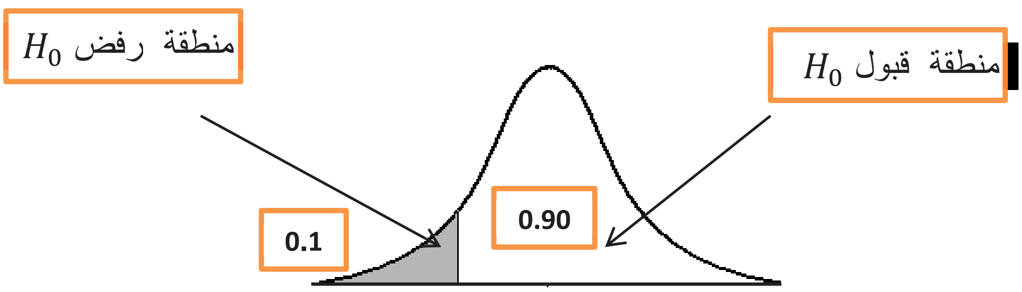
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو الانخفاض في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أصغر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mathrm{P} = 0.40 \longleftrightarrow H_1: \mathrm{P} < 0.40$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.10، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليسار كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-5: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة أحادي الاتجاه من اليسار عند مستوى معنوية 0.1



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \geq -Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.10 \Rightarrow \Rightarrow 0.5 - 0.10 = 0.4000$$

$$\Rightarrow -Z_{0.5-\alpha} = -1.28$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{38}{100} = 0.38$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.38 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(1 - 0.40)}{100}}} = -0.408$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $-0.408 > -1.28$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} > -Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني قبول الفرضية الصفرية ورفض الفرضية البديلة أي أنه لا يمكن الادعاء بأن هناك انخفاض معنوي في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم عند مستوى معنوية 10 %.

مثال 9:

تبين لشركة حضنة حليب من دراسات سابقة أن 80 % من المستهلكين يفضلون أكياس الحليب العادي على أكياس حليب البقر ، وفي استقصاء جديد تم على 500 مستهلك وجد أن 420 يفضلون أكياس الحليب العادي .

- عند مستوى ثقة 95 % ، هل بيانات العينة تؤيد ادعاء الشركة؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

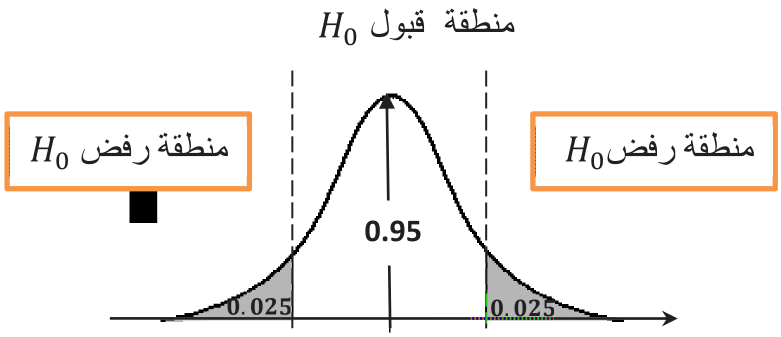
بما أن المسألة لم تتضمن اتجاها محددا حيث أشارت معطيات المثال إلى تحقق النسبة على مستوى العينة أم لا، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mathrm{P} = 0.80 \longleftrightarrow H_1: \mathrm{P} \neq 0.80$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار ثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-6: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة ثنائي الاتجاه عند مستوى معنوية 0.05



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار ثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$- \begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

$$\Longrightarrow Z_{0.5-\alpha/2} = 1.96$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{420}{500} = 0.84$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.84 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.80(1 - 0.80)}{100}}} = 1$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $+1.96 \; > \; 1 \; > \; -1.96$، أي أن: $-Z_{0.5-\alpha/2} \;\le\; \boldsymbol{Z_C} \le + Z_{0.5-\alpha/2}$

وهذا يعني قبول الفرضية الصفرية $_0$ ورفض الفرضية البديلة أي أن ادعاء الشركة بأن 80 % من المستهلكين يفضلون أكياس الحليب العادي على أكياس حليب البقر هو ادعاء صحيح.

6 - اختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع

لاختبار الفرضيات حول التباين نسلك نفس الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات السابقة، غير أن مجال قبول أو رفض الفرضية الصفرية يتحدد بالاعتماد على توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n -1)،

وتكون دالة الاختبار هي: $x^2 = (\mathrm{n}-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$.

σ_0^2: هي قيمة σ^2 المحددة بالفرضية الصفرية (المبدئية)

n: حجم العينة.

S^2: تباين العينة

أما الفرضية الصفرية H_0 فتكون كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

في حين أن الفرضية البديلة تأخذ الحالات الثلاث كما رأينا في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط، أو بالنسبة، وذلك حسب نوع الاختبار، تبعا لذلك يتم استخراج قاعدة القرار كما يلي:

الجدول 4-4: قاعدة القرار لاختبار التباين في الحالات الثلاث

نوع الاختبار	الفرضية البديلة	قاعدة القرار
أحادي الاتجاه من اليمين	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\begin{cases} X^2 \le x^2_{1-\alpha,\nu} & \Rightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$
أحادي الاتجاه من اليسار	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\begin{cases} X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu} & \Rightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ X^2 \le x^2_{1-\alpha,\nu} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$
ثنائي الاتجاه	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\begin{cases} x^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} \le X^2 \le x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} & \Rightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ X^2 < x^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} \lor X^2 > x^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$

مثال 10:

تدعي لجنة مختصة أن منتجات شركة صناعة العطور لها مدة استعمال بعد إنتاجها يزيد انحرافها المعياري عن شهرين، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة حجمها 20 فكان متوسط مدة استعمالها هو 3 سنوات وانحرافها المعياري 3 أشهر.

- هل النتائج المتوصل إليها من خلال العينة تفند هذا الادعاء أم تؤيده عند مستوى معنوية 5 % ؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

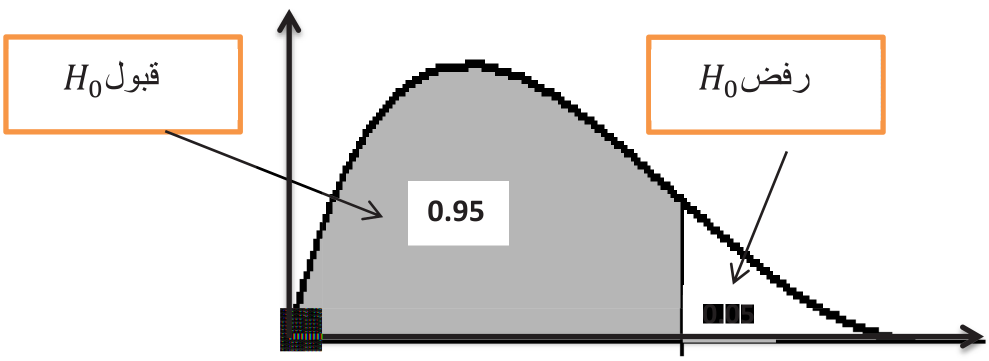
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا و هو زيادة الانحراف المعياري لمدة استعمالها عن شهرين فإن الفرضية البديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي

الشكل 4- 7: اختبار التباين أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

سيتم قاعدة القرار بناء على الإحصاءة x^2، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} X^2 \leq x^2_{0.95,19} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ X^2 > x^2_{0.95,19} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\mathrm{n} = 20 \Longrightarrow \nu = 20 - 1 = 19$$

فدرجة الحرية إذن هي 19، أما قيمة كاي تربيع المناظرة لها عند مستوى ثقة 0.95 من الجدول هي: $x^2_{0.95\,,19} = 30.14$

ثانيا: القيمة الفعلية

$$x^2 = (\mathrm{n} - 1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = (20 - 1)\frac{3^2}{2^2} = 42.75$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $42.75 > 30.144$ أي أن : $X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة أي أن النتائج المتوصل إليها من خلال العينة تؤيد أدعاء اللجنة عند مستوى معنوية 5 %.

7- تمارين السلسلة الرابعة: اختبار الفرضيات (الحلول في حصة الأعمال الموجهة)

التمرين الأول

1. ما هو المبدأ العام لاختبار الفروض؟
2. ماذا يقصد بالخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني؟
3. ماذا يقصد بقوة الاختبار؟

التمرين الثاني

شركة مصغرة مختصة في صناعة الأثاث المنزلي، يريد صاحبها التزود بأعمدة خشبية سمكها 4 سم، حيث تبين له من خلال خبرته السابقة أن الأقل سمكا غير ملائمة والأكثر سمكا أكثر تكلفة، فقام بأخذ عينة عشوائية من 36 عمودا من مورد فوجد أن متوسط سمكها هو 3.8 سم بانحراف معياري 0.2.

- بم تنصح صاحب الشركة إذا كان يرغب في اتخاذ القرار بشأن شراء الأعمدة من هذا المورد عند مستوى معنوية 5 %.

التمرين الثالث

إذا كان أحد مصانع الأغذية ينتج نوعا معينا من الألبان حيث متوسط وزن العبوة هو 0.5 كغ وذلك بانحراف معياري 36 غ، حيث أن أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي، ولمراقبة التزام المصنع بمعايير الجودة تم اختيار عينة من 25 عبوة فوجد أن متوسط الأوزان يساوي 0.48 كغ .

- هل ترى أن هناك عيبا في الإنتاج أدى إلى انخفاض متوسط الأوزان للعبوات عند مستوى معنوية 1%.

التمرين الرابع

بلغت نسبة الطلبة المسجلين بالمركز المكثف للغات بإحدى جامعات الجزائر 20%، وفي محاولة من إدارة المعهد لرفع هذه النسبة شرعت في توعية الطلاب بمختلف الوسائل الترويجية للمعهد ومهامه، ثم قامت بأخذ عينة عشوائية من 1000 طالب فوجدت بأن عدد المسجلين بالمعهد هو 220 طالبا.

- ما هو تقييمك لمحاولة إدارة المعهد عند مستوى معنوية 0.05.

التمرين الخامس: تم أخذ أربع قراءات بجهاز معين فكانت قيمها كما يلي: 59، 55، 51، 51.
اختبر الفرضية الصفرية: $H_0: \sigma = 0.7$ مقابل الفرضية البديلة: $H_1: \sigma \neq 0.7$ عند مستوى دلالة 0.10.

قائمة المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

1. أنيس اسماعيل كنجو، **الإحصاء والاحتمال**، مكتبة العبيكان، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2000.

2. جورج كانافوس، دون ميلر، ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني ،**الإحصاء للتجاريين**، مدخل حديث، دار المريخ، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2004.

3. د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.

4. دلال القاضي وآخرون، **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار الحامد، عمان، الأردن، 2005.

5. كمال سلطان محمد سالم، **الإحصاء الاحتمالي**، الدار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2004.

6. محمد حسين محمد رشيد، منى عطا الله الشويلات، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج SPSS**، دار صفاء، عمان، الأردن، 2012.

7. محمد خير سليم أبو زيد، **التحليل الإحصائي للبيانات باستخدام برمجية SPSS**، دار جرير، دار صفاء، عمان، الأردن، 2010.

8. محمد راتول، الإحصاء الوصفي، ديوان المطبوعات الجامعية، ط 2، الجزائر، 2006.

9. محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء مبادئ وتحليل باستخدام SPSS**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2004.

10. محمد عبد الفتاح الصيرفي ، **الدليل التطبيقي للباحثين**، دار وائل، عمان، الأردن، 2002.

11. معتوق أمحمد، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007.

12. موراي شبيحل، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.

13. موريس أنجرس، ترجمة بوزيد صحراوي وآخرون، **منهجية البحث في العلوم الإنسانية**، دار القصبة، الجزائر، 2004.

14. سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، مبادئ **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007.

15. سامح جزماتي، **الاحتمالات والإحصاء**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، دمشق، 1989.

16. سعيد التل وآخرون، مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007.

17. سليمان محمد طشطوش، **أساسيات الإحصاء الرياضي**، دار اليازوري، دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، عمان الأردن، 2012

18. شبيزل، شيلر، سرينيفيسان، ترجمة محمد علي عبد الناصر، مصطفى جلال مصطفى، **الاحتمالات والإحصاء**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004.

19. صالح بو عبدالله، **مطبوعة محاضرات الإحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المسيلة، 2006/2005.

20. عامر إبراهيم قنديلجي، **منهجية البحث العلمي**، دار اليازوري، عمان ، الأردن، 2012.

21. عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، **الاستدلال الإحصائي (1) نظرية التقدير**، مجموعة النيل العربية، مصر، 1999.

22. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **الأساليب الإحصائية التطبيقية**، دار الشروق للنسر والتوزيع، عمان، الأردن، 2004.

23. عبد المجيد قدي، **أسس البحث العلمي في العلوم الاقتصادية**، دار الأبحاث، الجزائر، 2009.

24. عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة بالتعاون مع جامعة القدس المفتوحة، مصر، 2009.

25. عزام صبري، **الإحصاء الرياضي**، دار صفاء، عمان، الأردن، 2010.

26. فايز جمعة صالح النجار وآخرون، **أساليب البحث العلمي، منظور تطبيقي**، دار الحامد، عمان ، الأردن، 2009.

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

1. C. Reder, **Probabilites et Statistiques**, Cours et Exercices, IUP2-MIAGE, Bordeaux I, 2002-2003.
2. F. Balabdaoui-Mohr et O. Wintenberger, **Statistique Mathématique,** https://www.ceremade.dauphine.fr/~fadoua/statmathpoly2009.pdf
3. GLEN COWN , **Statistcal Data Analysis** , Clarendon , OXFORD , 1998
4. N V Nagendram, **Probability and Statistical Applications – Distributions,** https://www.researchgate.net/publication/268870344_Probability_and_Statistical_Applications_-_Distributions?enrichId=rgreq-36c95422c5fb776a6216f014d071617b-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI2ODg3MDM0NDtBUzoxNjg4MTg3Njg4ODM3MTJAMTQxNzI2MDkzOTcwMQ%3D%3D&el=1_x_3.