

# Electrostatique

## (Chapitre 1)

### Physique 2

H. Latelli

Département de physique

Laboratoire de Physique et Chimie des Matériaux

Equipe: Modélisation et Simulation des Matériaux

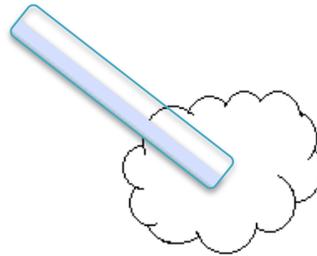
## 1. Phénomènes d'électrisation

Ce sont les grecs qui découvrirent les premiers phénomènes d'électrisation.

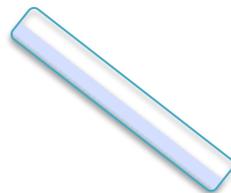
Thalès de Milet (625–547 av. J.C) observa que de l'ambre frottée par de la laine attirait des brins de paille.

### Expérience :

On frotte un morceau de verre avec de la laine.



Si on approche le verre frotté à de petits morceaux de papier :

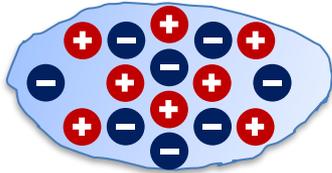


Les morceaux de papier sont alors attirés par le verre.



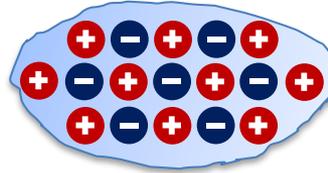
# Chapitre 1 : Electrostatique

## Interprétation :



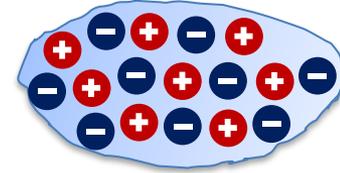
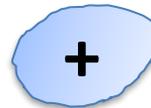
$$(+8) + (-8) = 0$$

Neutre



$$(+10) + (-7) = +3$$

Chargé positivement



$$(+8) + (-9) = -1$$

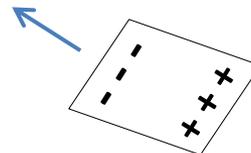
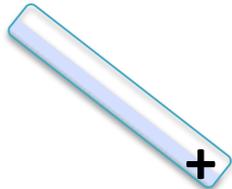
Chargé négativement



En frottant le verre, les électrons ont été arrachés par la laine, le verre se retrouve alors chargé positivement

En approchant le verre à ces petits morceaux de papier, les électrons ont été arrachés par la laine, le verre se retrouve alors chargé positivement, ces derniers sont attirés par attraction.

Comme ils sont neutres, leurs extrémités opposées seront chargées positivement :

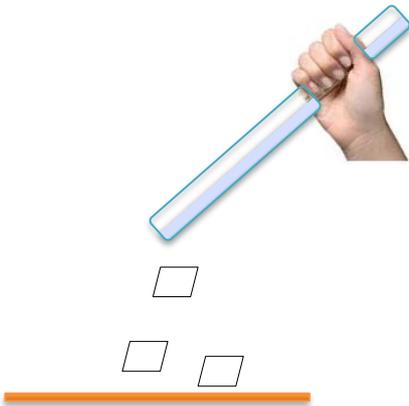


# Chapitre 1 : Electrostatique

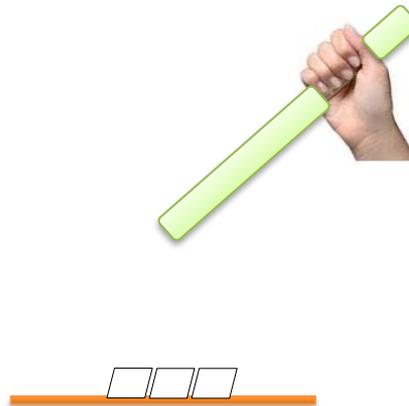
Il existe trois types d'électrisation : **Par frottement, par influence et par contact.**

## ■ Par frottement

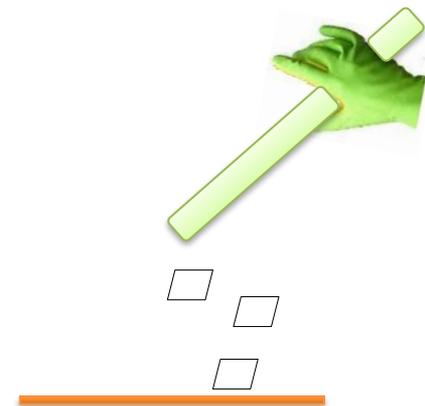
① : verre frotté



② : cuivre frotté



③ : cuivre frotté



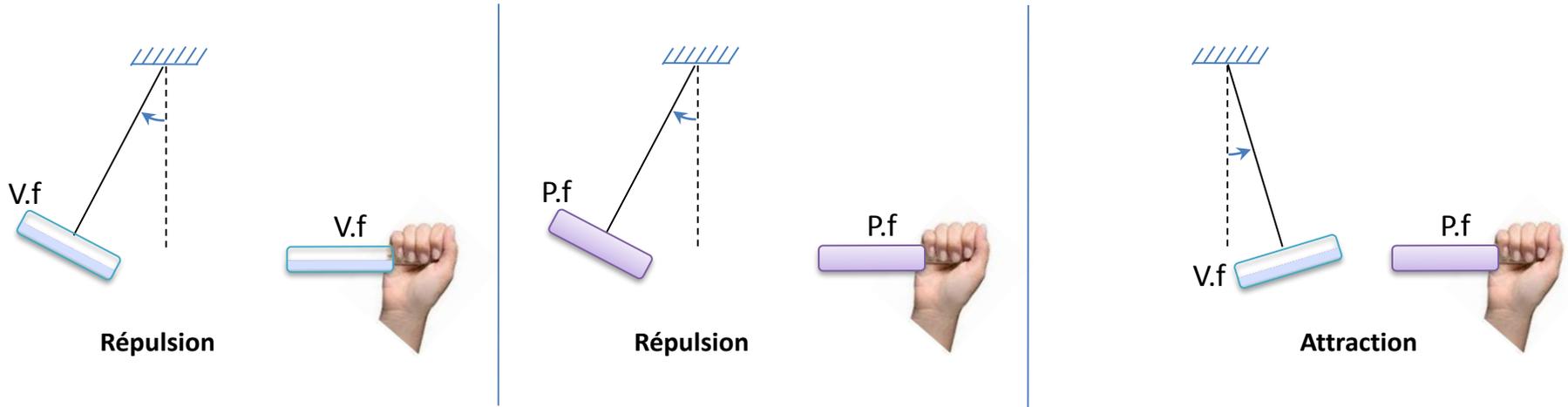
L'expérience (1) montre que les charges acquises par frottement restent localisées dans la partie frottée du verre et ne se répartissent pas sur toute la surface: **le verre le PVC, l'ébonite etc. sont des isolants.**

L'expérience (2) montre que les charges dues à l'électrisation par frottement se déplacent dans le cuivre et s'écoulent vers la terre à travers le corps humain .

Dans l'expérience (3), le gant empêche l'écoulement vers la terre. Cette exp. Montre que les **métaux sont des conducteurs.**

# Chapitre 1 : Electrostatique

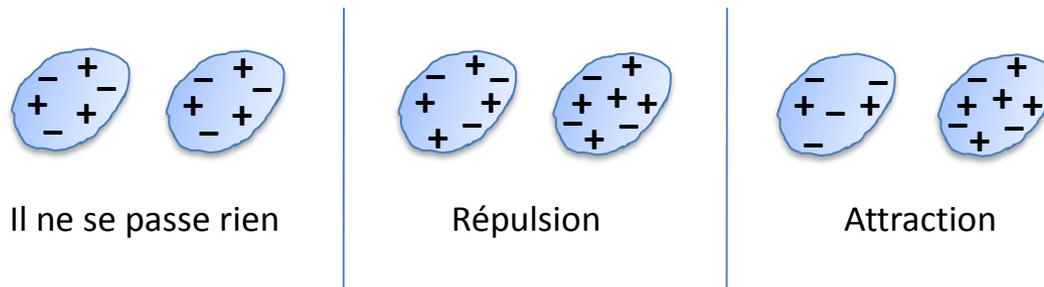
## 4 : Mise en évidence de 2 types d'électricité



Ces expériences mettent en évidence 2 types d'électricité: Benjamin Franklin (1709–1790) les appela:

- Electricité positive + : portée par le verre frotté,
- Electricité négative - : portée par la résine frottée.

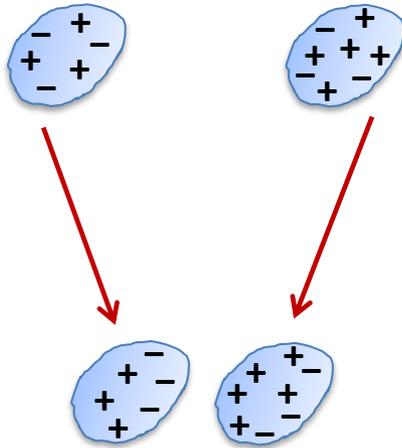
**Conclusion** : 2 corps chargés de mêmes signes se **repoussent** , alors qu'ils **s'attirent** s'ils sont chargés de signes opposés.



# Chapitre 1 : Electrostatique

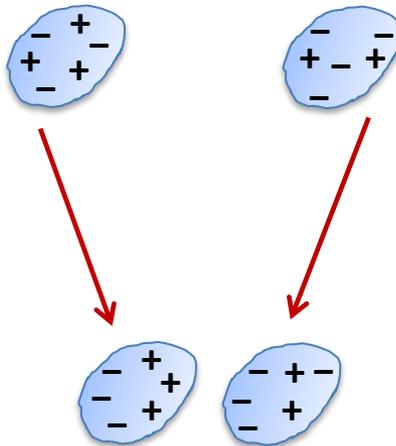
## Par influence

① : Approchons un corps neutre d'un corps chargé positivement :



Dans cette expérience, les charges positives en excès du corps chargé + vont attirer les électrons du corps neutre qui vont se concentrer sur la partie la plus proche du corps. C'est l'électrisation **par influence**.

② : Approchons un corps neutre d'un corps chargé négativement :



Il en est de même pour (2).

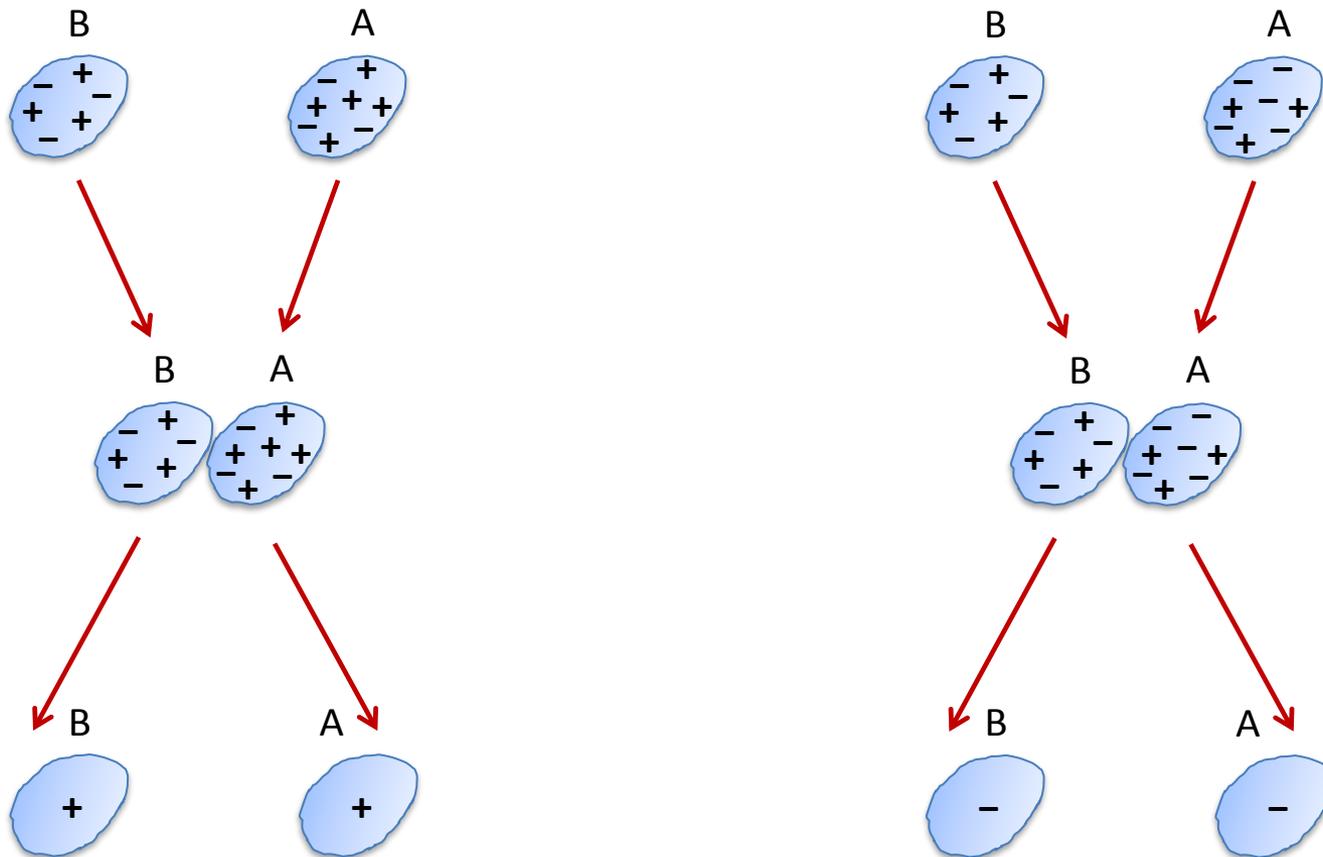
### **IMPORTANT :**

Par influence, les charges ne se déplacent pas d'un corps à un autre.

# Chapitre 1 : Electrostatique

## Par contact

Lorsqu'un corps chargé touche brièvement un corps neutre, le corps neutre prend le même type de charges que celui du corps chargé.

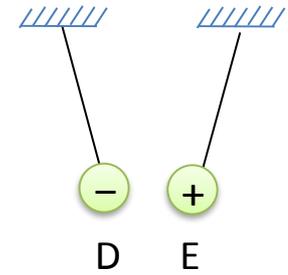
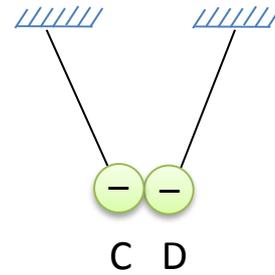
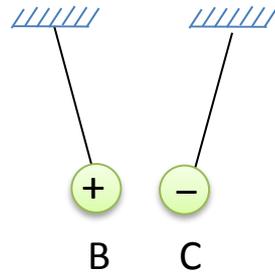
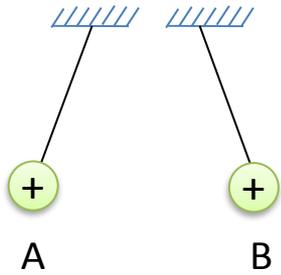


**IMPORTANT :** Ce sont toujours les électrons qui sont transférés.

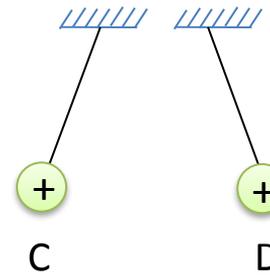
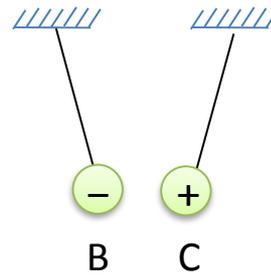
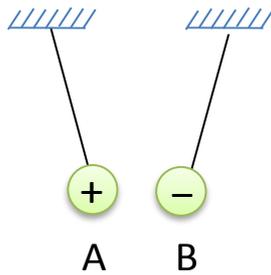
# Chapitre 1 : Electrostatique

## Exemple :

1. Quelle est le type de charges du ballon E ?



2. Que se passe t-il si on approche A de D ?



## 2. La charge électrique ( $q$ ou $Q$ )

Un corps électrisé se caractérise d'un corps non électrisé par une propriété supplémentaire qui est l'électrisation.

- Il existe deux sortes de charges électriques : les charges **positives** et les charges **négatives**.
- Les charges négatives sont portées par des particules très petites appelées : **électrons**,
- Les charges positives sont portées par des particules moins petites appelées : **protons**.
- Tout corps contient à la fois les **charges négatives et les charges positives**.
- Dans un corps **neutre** les charges négatives et les charges positives se compensent : **la charge totale est nulle**.
- L'unité de la charge électrique est : le coulomb (C) , ampère-heure (Ah) :

$$q_e = -1.602 \times 10^{-19} C$$

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$$

$$q_p = +1.602 \times 10^{-19} C$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} kg = 1837 m_e$$

$$1eV \text{ (électron-volt)} = 1.602 \times 10^{-19} J$$

$$1Ah = 3600 C$$

$$1mC = 10^{-3} C$$

$$1\mu C = 10^{-6} C$$

$$1nC = 10^{-9} C$$

$$1pC = 10^{-12} C$$

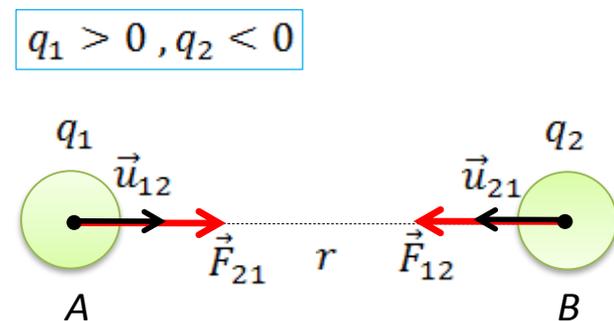
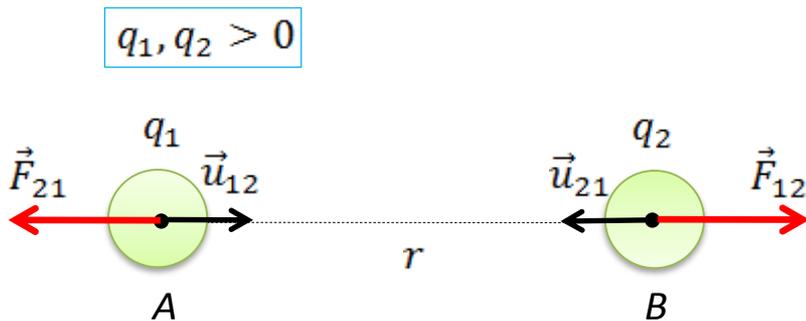
$$1fC = 10^{-15} C$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## 3. La force électrique ( $F$ )

### a) Loi de Coulomb (1736-1806)

Soient deux charges  $q_1$  et  $q_2$  immobiles placées aux points  $A$  et  $B$  dans le vide.



Force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad , \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ S.I} \quad [F] = \text{Newton (N)}$$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \quad , \quad r = \|\vec{AB}\| \quad , \quad \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

Force exercée par  $q_2$  sur  $q_1$  :

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21}$$

$$\vec{u}_{21} = \frac{\vec{BA}}{\|\vec{AB}\|} \quad , \quad r = \|\vec{BA}\| \quad , \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{BA}$$

$$\|\vec{F}_{12}\| = \|\vec{F}_{21}\|$$

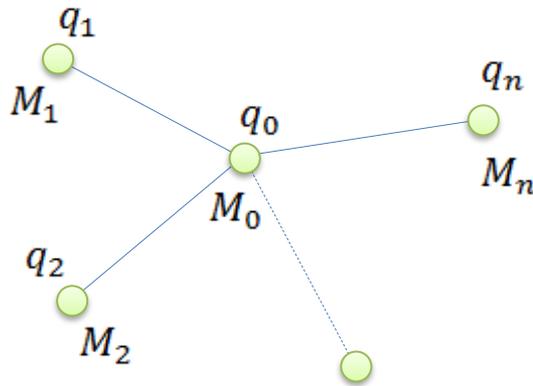
# Chapitre 1 : Electrostatique

Validité de la loi de Coulomb :  $r \geq 10^{-12}m$

Si  $r < 10^{-12}m$ , les charges ne peuvent plus être considérées comme ponctuelles.

## b) Principe de superposition

Soient  $(q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$  charges placées, respectivement, aux points  $(M_0, M_1, M_2, \dots, M_n)$  dans le vide.



La force exercée par l'ensemble des charges sur la charge  $q_0$  située au point  $M_0$  est :

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0}$$

$$\vec{F}_{10} = k \frac{q_1 q_0}{\| \overrightarrow{M_1 M_0} \|^3} \overrightarrow{M_1 M_0}$$

$$\vec{F}_{20} = k \frac{q_2 q_0}{\| \overrightarrow{M_2 M_0} \|^3} \overrightarrow{M_2 M_0}$$

.....

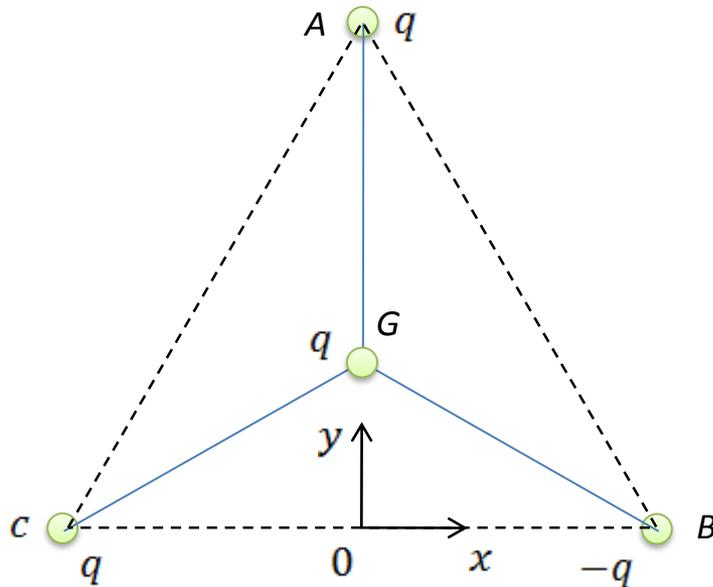
$$\vec{F}_{n0} = k \frac{q_n q_0}{\| \overrightarrow{M_n M_0} \|^3} \overrightarrow{M_n M_0}$$

$$\vec{F}_0 = k q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\| \overrightarrow{M_i M_0} \|^3} \overrightarrow{M_i M_0}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## Exemple :

Calcul de la force exercée par trois charges  $1\mu\text{C}$ ,  $-1\mu\text{C}$  et  $1\mu\text{C}$ , placées aux sommets d'un triangle équilatéral de coté  $1\text{cm}$  sur une charge de  $1\mu\text{C}$  située au centre du triangle.



$$\vec{F}_G = \vec{F}_{AG} + \vec{F}_{BG} + \vec{F}_{CG}$$

$$\vec{F}_{AG} = k \frac{q^2}{\|\vec{AG}\|^3} \vec{AG}$$

$$\vec{F}_{BG} = -k \frac{q^2}{\|\vec{BG}\|^3} \vec{BG}$$

$$\vec{F}_{CG} = k \frac{q^2}{\|\vec{CG}\|^3} \vec{CG}$$

$$\|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\|$$

$$\vec{F}_G = k \frac{q^2}{\|\vec{AG}\|^3} (\vec{AG} - \vec{BG} + \vec{CG})$$

$$A(0, y_A), B(a, 0), C(-a, 0), G(0, y_G)$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{y_A}{2a} \rightarrow y_A = a\sqrt{3}$$

$$\text{tg}(30^\circ) = \frac{y_G}{a} \rightarrow y_G = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$\overrightarrow{AG} = \left( \frac{a}{\sqrt{3}} - a\sqrt{3} \right) \vec{j} = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \vec{j}$$

$$\|\overrightarrow{AG}\|^3 = \frac{8a^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{BG} = -a\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{3}}\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CG} = +a\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{3}}\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 2a\vec{i} - \frac{2a}{\sqrt{3}}\vec{j} = \frac{2a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

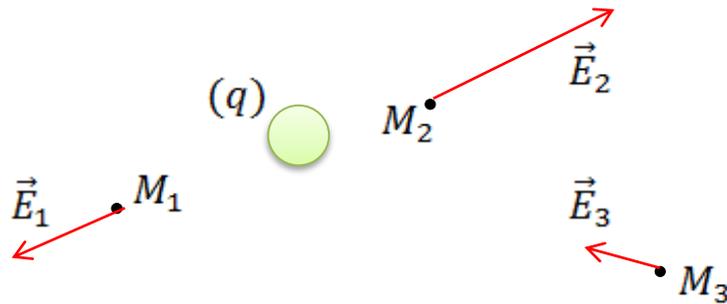
$$\vec{F}_G = 3k \frac{q^2}{4a^2} (\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

$$F_G = \|\vec{F}_G\| = 3k \frac{q^2}{2a^2}$$

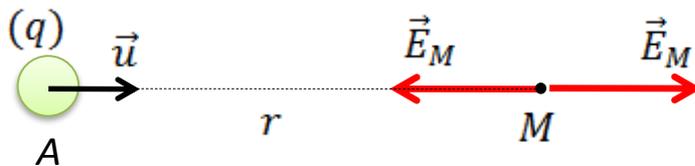
$$F_G = 135 \text{ N}$$

## 4. Le champ électrique ( $\vec{E}$ )

Les propriétés de l'espace qui entourent une charge électrique sont traduites par l'existence d'un champ électrique.



### a) Cas d'une seule charge



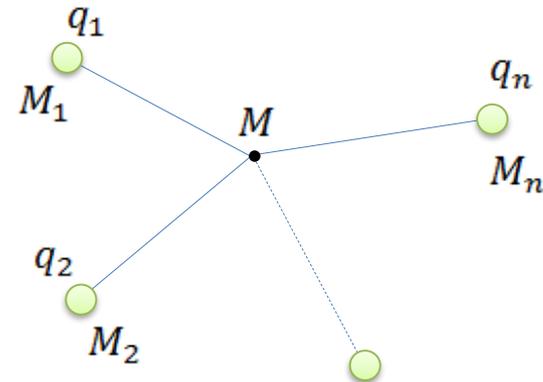
$$\vec{E}_M = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$[E] = \text{Volt.mètre (V.m)}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}, \quad r = \|\overrightarrow{AM}\|$$

$$\vec{E}_M = k \frac{q}{\|\overrightarrow{AM}\|^3} \overrightarrow{AM}$$

### b) Cas de plusieurs charges



Le champ créé par l'ensemble des charges au point  $M$  est :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{\|\vec{M}_1\vec{M}\|^3} \vec{M}_1\vec{M}$$

$$\vec{E}_2 = k \frac{q_2}{\|\vec{M}_2\vec{M}\|^3} \vec{M}_2\vec{M}$$

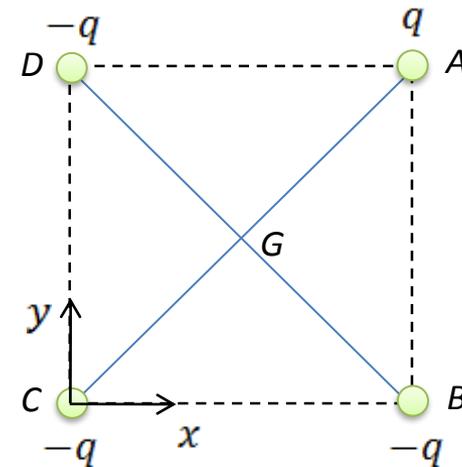
.....

$$\vec{E}_n = k \frac{q_n}{\|\vec{M}_n\vec{M}\|^3} \vec{M}_n\vec{M}$$

$$\vec{E}_M = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\|\vec{M}_i\vec{M}\|^3} \vec{M}_i\vec{M}$$

## Exemple :

Calcul du champ électrique, crée par 4 charges  $(q, -q, -q, -q)$  placées aux sommets d'un carré de côté  $2a$ , au centre du carré.



$$\vec{E}_G = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{\|\vec{AG}\|^3} \vec{AG} \quad , \quad \vec{E}_2 = -k \frac{q}{\|\vec{BG}\|^3} \vec{BG}$$

$$\vec{E}_3 = -k \frac{q}{\|\vec{CG}\|^3} \vec{CG} \quad , \quad \vec{E}_4 = -k \frac{q}{\|\vec{DG}\|^3} \vec{DG}$$

$$\|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\| = \|\vec{DG}\|$$

$$\vec{E}_G = k \frac{q}{\|\vec{AG}\|^3} (\vec{AG} - \vec{BG} - \vec{CG} - \vec{DG})$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$\vec{E}_G = k \frac{q}{\|\vec{AG}\|^3} (\vec{AG} - \vec{BG} - \vec{CG} - \vec{DG})$$

$$A(2a, 2a), B(2a, 0), C(0, 0)$$

$$D(0, 2a), G(a, a)$$

$$\vec{AG} = -a\vec{i} - a\vec{j}$$

$$\vec{BG} = -a\vec{i} + a\vec{j}$$

$$\vec{CG} = +a\vec{i} + a\vec{j}$$

$$\vec{DG} = +a\vec{i} - a\vec{j}$$

$$\|\vec{AG}\|^3 = 2a^3\sqrt{2}$$

$$\vec{AG} - \vec{BG} - \vec{CG} - \vec{DG} = -2a\vec{i} - 2a\vec{j}$$

$$\vec{E}_G = -k \frac{q}{a^2\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$E_G = \|\vec{E}_G\| = k \frac{q}{a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

## c) Relation entre $\vec{E}$ et $\vec{F}$



$$\vec{E}_M = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

Si on place au point  $M$  une autre charge  $q'$ , elle est soumise à une force :

$$\vec{F}_M = k \frac{qq'}{r^2} \vec{u}$$

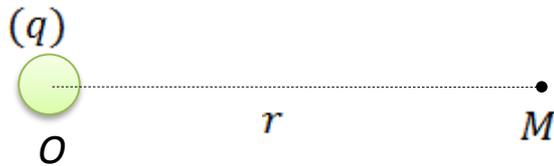
D'où :

$$\vec{F}_M = q' \cdot \vec{E}_M$$

## 5. Le potentiel électrique (V)

### a) Cas d'une seule charge

En un point  $M$  situé à la distance  $r$  d'un point  $O$ , il existe un potentiel  $V$  tel que :

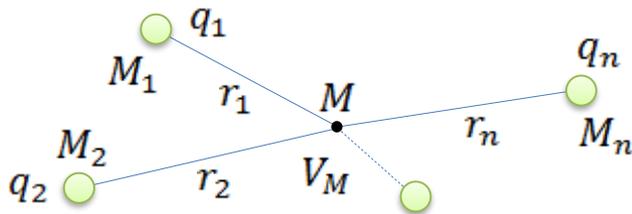


$$V_M = k \frac{q}{r} + Cste$$

$$V_M(\infty) = 0$$

$$[V_M] = \text{volt (V)}$$

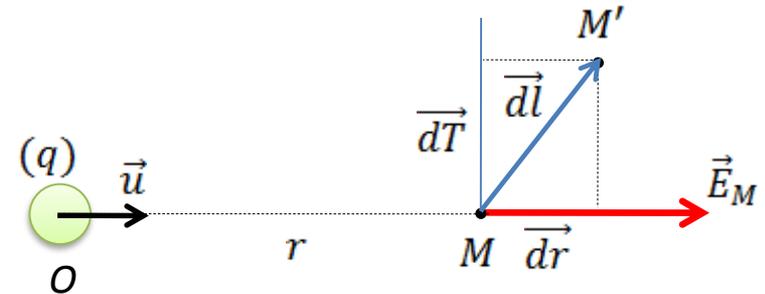
### b) Cas de $n$ charges



$$V_M = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i} + Cste$$

### c) Relation entre $\vec{E}$ et $V$

Soit une charge  $q$  au point  $O$  :



$$\vec{E}_M = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \vec{E}_M = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

Soit un point  $M'$  très proche de  $M$ , tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$$

La circulation élémentaire du vecteur  $\vec{E}_M$  du point  $M$  au point  $M'$  est définie par :

$$dC = \vec{E}_M \cdot \vec{dl}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$dC = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{l} \quad , \quad d\vec{l} = d\vec{r} + d\vec{T}$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{l} = \vec{r} \cdot (d\vec{r} + d\vec{T}) = \vec{r} \cdot d\vec{r} + \underbrace{\vec{r} \cdot d\vec{T}}_0$$

$$dC = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{E}_M \cdot d\vec{r}$$

Entre  $M$  et  $M'$  existe une DDP,  $dV_M$ , tel que :

$$dV_M = -dC$$

D'où :

$$dV_M = -\vec{E}_M \cdot d\vec{r}$$

Vérification de l'expression de  $V_M$  :

$$dV_M = -k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$V_M = - \int k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{r} \cdot d\vec{r} = r \cdot dr$$

$$V_M = - \int k \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q}{r} + Cste$$

## 6. Expression de $\vec{E}$ dans diff. coord.

### a) En coordonnées cartésiennes

Soit un point  $M$  dont le vecteur position est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$d\tau = dx dy dz \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{volume} \\ \text{élémentaire} \end{array} \right.$$

$$V = f(x, y, z)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}(V)} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$d\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}(V)} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

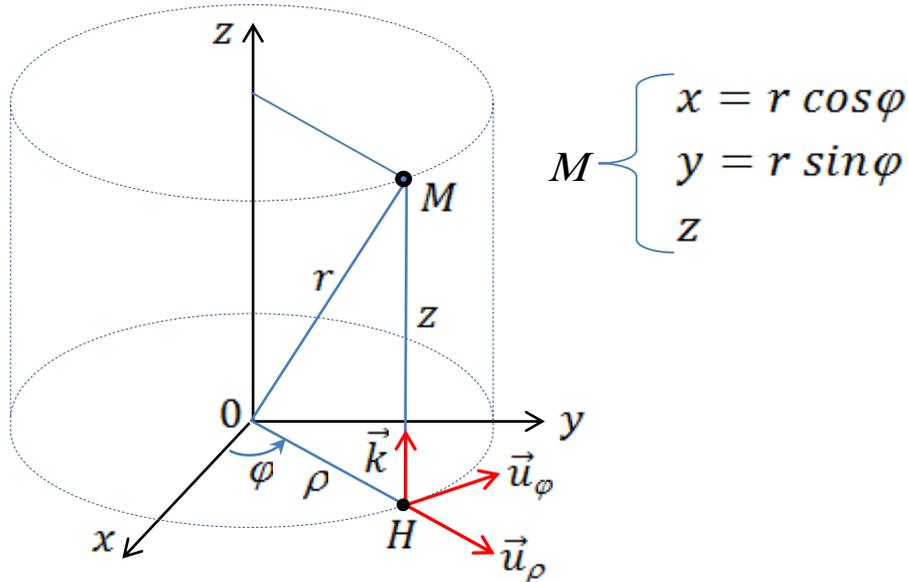
$$dV = \overrightarrow{\text{grad}(V)} \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}(V)}$$

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

## b) En coordonnées cylindriques

Soit un point  $M$  dont le vecteur position est :



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{r} = d(\rho \cdot \vec{u}_\rho) + dz \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot d\vec{u}_\rho + dz \cdot \vec{k}$$

$$\vec{u}_\rho = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$$

$$d\vec{u}_\rho = d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi + dz \cdot \vec{k}$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{volume} \\ \text{élémentaire} \end{array} \right.$$

$$V = f(\rho, \varphi, z)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = X \cdot \vec{u}_\rho + Y \cdot \vec{u}_\varphi + Z \cdot \vec{k}$$

$$dV = \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V) = X d\rho + Y \rho d\varphi + Z dz$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad Y = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

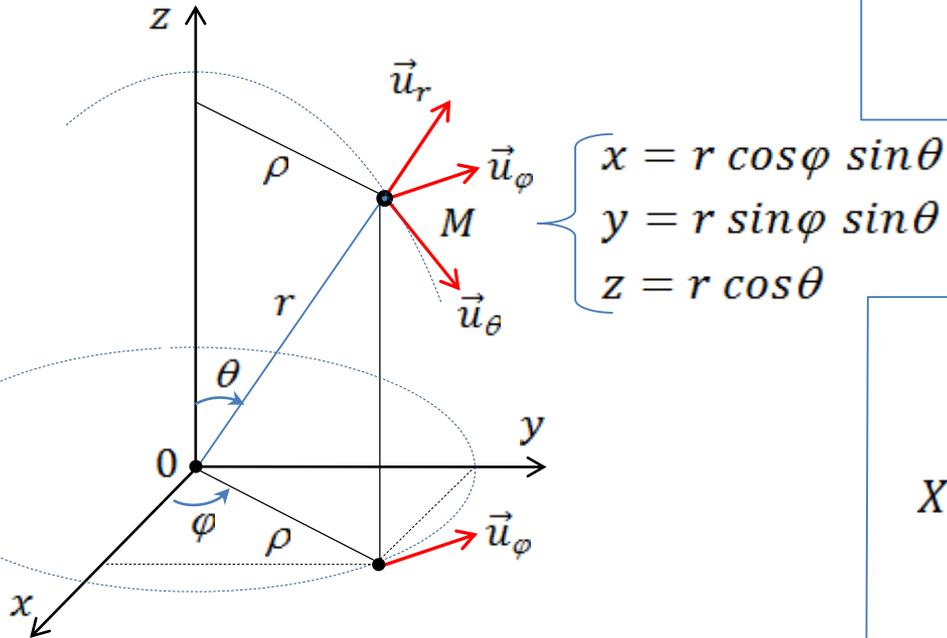
$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## c) En coordonnées sphériques

Soit un point  $M$  dont le vecteur position est :



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{dr} = dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta + \rho d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$\rho = r \sin \theta$$

$$d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{volume} \\ \text{élémentaire} \end{array} \right.$$

$$V = f(\rho, \varphi, z)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = X \cdot \vec{u}_r + Y \cdot \vec{u}_\theta + Z \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$dV = \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

$$= X \cdot dr + Y \cdot r d\theta + Z \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad Y = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad Z = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi$$

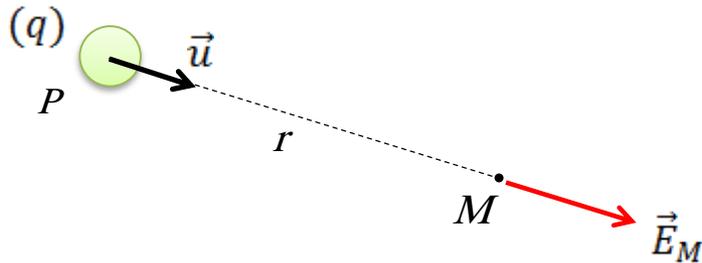
$$\vec{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi \right)$$

## 7. Distribution de charges

Dans le cas où les charges électriques ne sont plus ponctuelles, c-à-d qu'elles sont réparties sur le corps chargé, on peut alors considérer trois cas : distribution linéaire, distribution surfacique et distribution volumique.

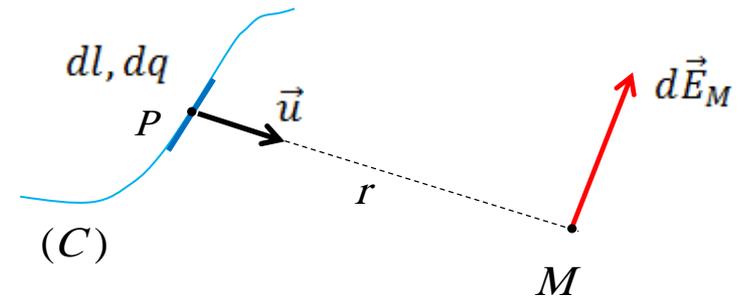
### a) Distribution linéaire ( $\lambda$ )

**Rappel** : charge ponctuelle.



$$\vec{E}_M = k \frac{q}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

Distribution linéaire :



$$q \rightarrow dq \quad , \quad \vec{E}_M \rightarrow d\vec{E}_M$$

$$d\vec{E}_M = k \frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

$$dq = \lambda dl$$

Le champ total est :

$$\vec{E}_M = k \int_{(C)} \frac{\lambda dl}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

## b) Invariances et symétries du champ électrique

L'expression générale du champ électrique :

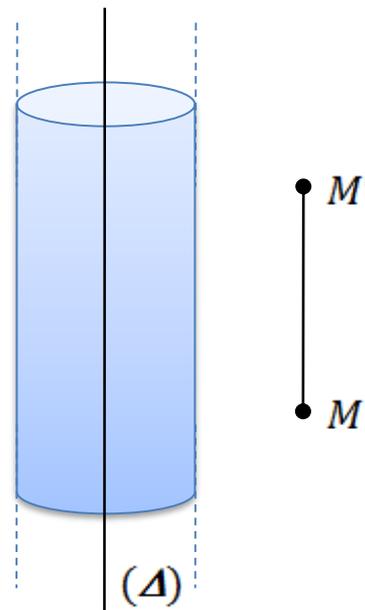
$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + E_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + E_z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_r(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r, \varphi, z) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\varphi$$

1. **Étude des invariances** : suppression de coordonnées auxquelles peut dépendre le champ électrique.

- **Par translation** :



**M et M' doivent voir la même distribution.**

## b) Invariances et symétries du champ électrique

L'expression générale du champ électrique :

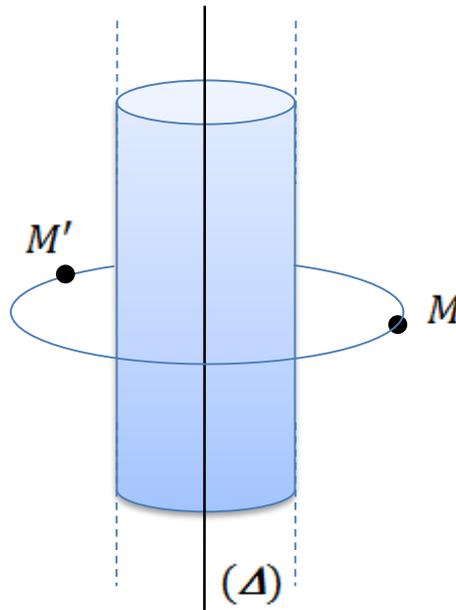
$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + E_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + E_z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_r(r, \quad, \quad) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, \quad, \quad) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r, \quad, \quad) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\varphi$$

1. **Étude des invariances** : suppression de coordonnées auxquelles peut dépendre le champ électrique.

- **Par rotation** :



*M et M' doivent voir la même distribution.*

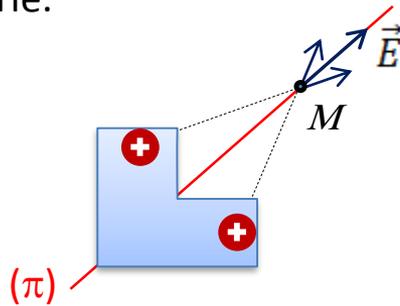
# Chapitre 1 : Electrostatique

## 2. Étude des symétries : suppression de composantes du champ électrique.

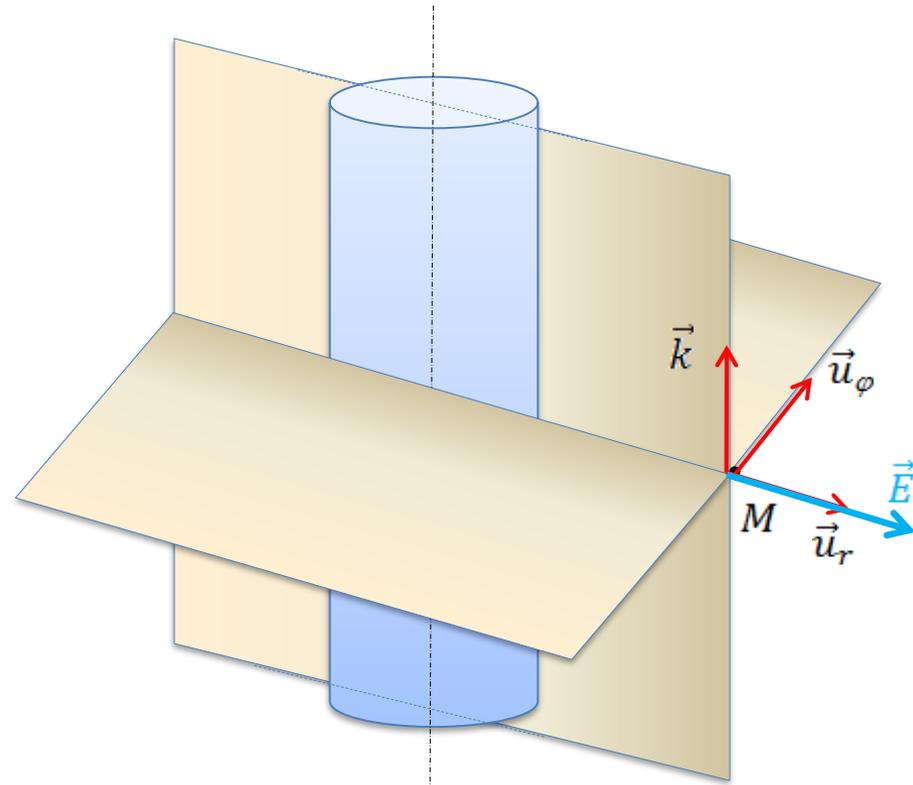
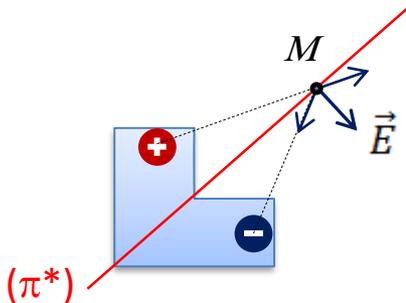
$$\vec{E} = E_r(r) \cdot \vec{u}_r + \text{[red box]} + \text{[red box]}$$

### Rappel :

- **Plan de symétrie ( $\pi$ )** : le champ électrique est toujours contenu dans le plan de symétrie.



- **Plan d'anti-symétrie ( $\pi^*$ )** : le champ électrique est toujours  $\perp$  au plan d'anti-symétrie.

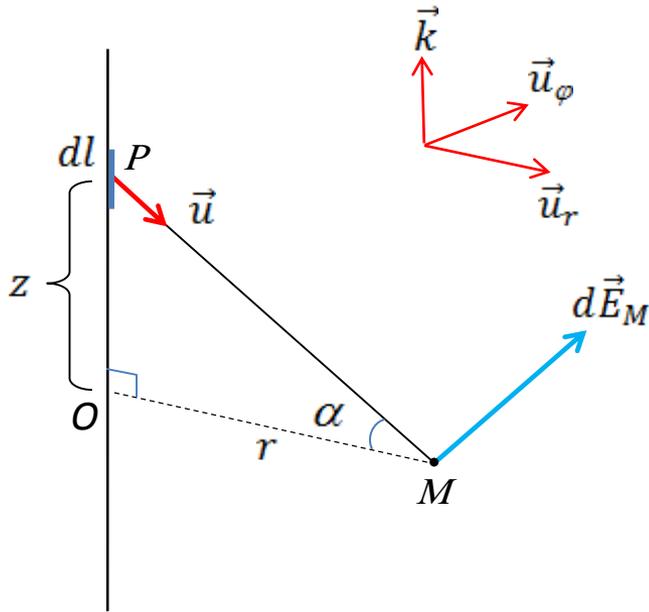


$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## Exemple :

Calcul du champ électrique, crée par un fil de longueur infinie et chargé par  $\lambda$  uniforme, en tout point de l'espace. En déduire le potentiel en ce point. On prendra:  $V_M = 0$  pour  $r = 1$ . Tracer  $E_M(r)$  et  $V_M(r)$ .



$$d\vec{E}_M = k \frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

$$dq = \lambda dl = \lambda dz$$

L'expression générale du champ électrique :

$$\vec{E} = E_r(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_\theta + E_z(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_\varphi$$

Invariances :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r) \cdot \vec{k}$$

Symétries :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$P(0,0,z) , M(r,0,0) \rightarrow \overrightarrow{PM} = r \cdot \vec{u}_r - z \cdot \vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{PM}\|^3 = (r^2 + z^2)^{3/2}$$

$$d\vec{E}_M = k \frac{\lambda dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r \cdot \vec{u}_r - z \cdot \vec{k})$$

$$\vec{E}_M = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r \cdot \vec{u}_r - z \cdot \vec{k})$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$\vec{E}_M = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r \cdot \vec{u}_r - z \cdot \vec{k})$$

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$E_r(r) \cdot \vec{u}_r = k\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (r \cdot \vec{u}_r - z \cdot \vec{k})$$

$$E_r(r) = k\lambda r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{r} \rightarrow z = r \operatorname{tg} \alpha \rightarrow dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$(r^2 + z^2)^{3/2} = \frac{r^3}{\cos^3 \alpha}$$

$$z \in ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \alpha \in ]-\pi/2, +\pi/2[$$

$$E_r(r) = \frac{k\lambda}{r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha$$

$$E_r(r) = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_M = -\left( \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

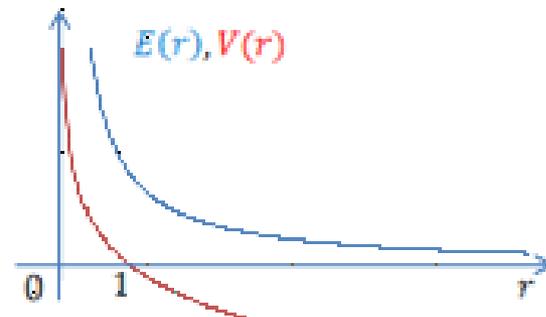
$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \rightarrow dV = -E_r(r) dr$$

$$V(r) = -\int E_r(r) dr + C$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} + C$$

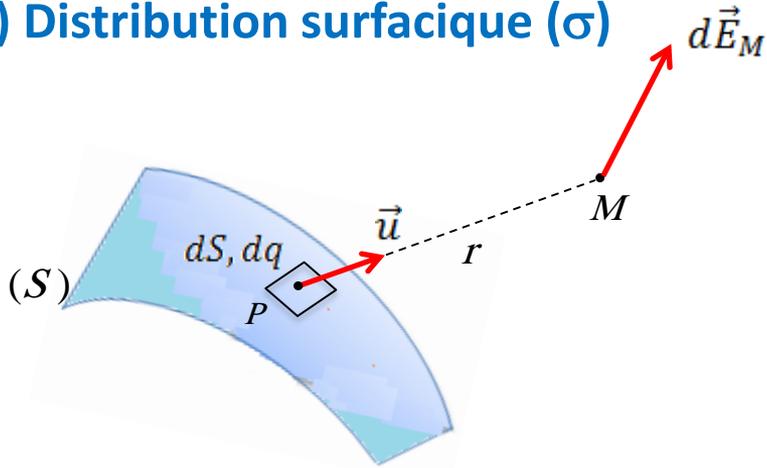
$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C$$

$$V(1) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$



# Chapitre 1 : Electrostatique

## c) Distribution surfacique ( $\sigma$ )



$$d\vec{E}_M = k \frac{dq}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

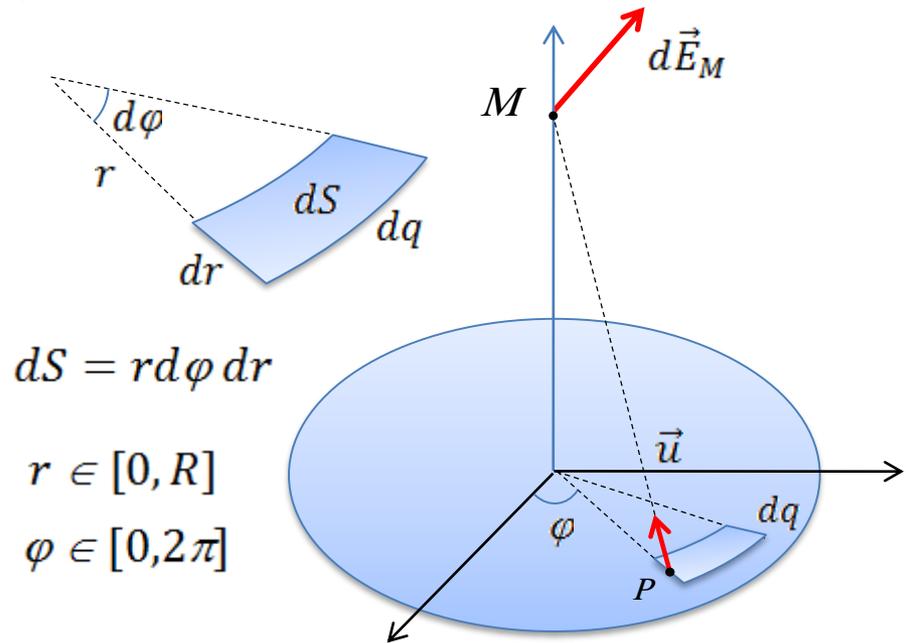
$$dq = \sigma dS$$

Le champ total est :

$$\vec{E}_M = k \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

## Exemple :

Calcul du champ électrique, crée par un disque de rayon  $R$  et chargé par  $\sigma$  uniforme, en un point situé sur l'axe du disque. En déduire le champ crée par un plan infini.



$$dS = r d\phi dr$$

$$r \in [0, R]$$

$$\phi \in [0, 2\pi]$$

$$dq = \sigma dS = \sigma r dr d\phi$$

$$d\vec{E}_M = k \frac{\sigma r dr d\phi}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

L'expression générale du champ électrique :

$$\vec{E} = E_r(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_z$$

**Invariances :**

$$\vec{E}_M = E_r(r, z) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, z) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r, z) \cdot \vec{k}$$

**Symétries :**

$$\vec{E}_M = E_z(r, z) \cdot \vec{k}$$

$$P(0,0,0) , M(-r, 0, z) \rightarrow \vec{PM} = -r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{k}$$

$$\|\vec{PM}\|^3 = (r^2 + z^2)^{3/2}$$

$$d\vec{E}_M = k \frac{\sigma r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{k})$$

$$\vec{E}_M = k\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{k})$$

$$E_z(r, z) \cdot \vec{k} = k\sigma \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{k}) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$E_z(r, z) = k\sigma z \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$I_2 = \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$r^2 + z^2 = T^2 \rightarrow r dr = T dT$$

$$I_2 = \int_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{dT}{T^2} = \left[ \frac{1}{T} \right]_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E_z(r, z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

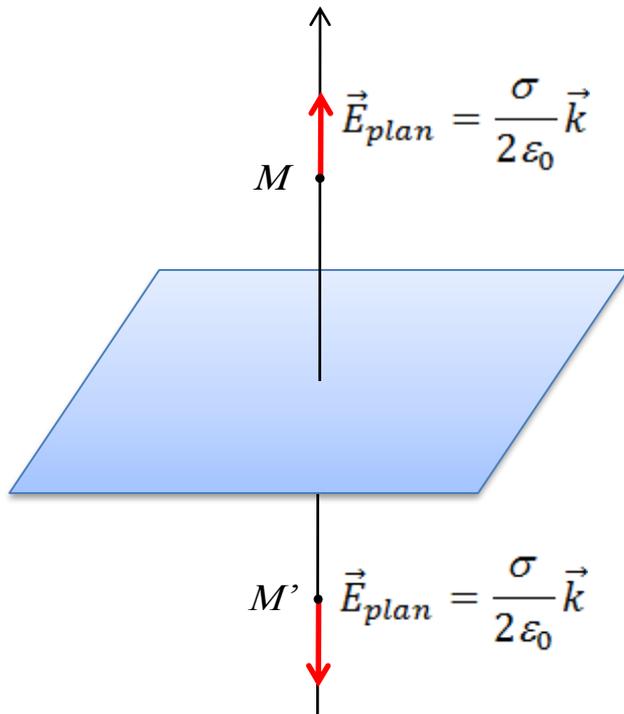
$$E_z(r, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) , & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) , & z < 0 \end{cases}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

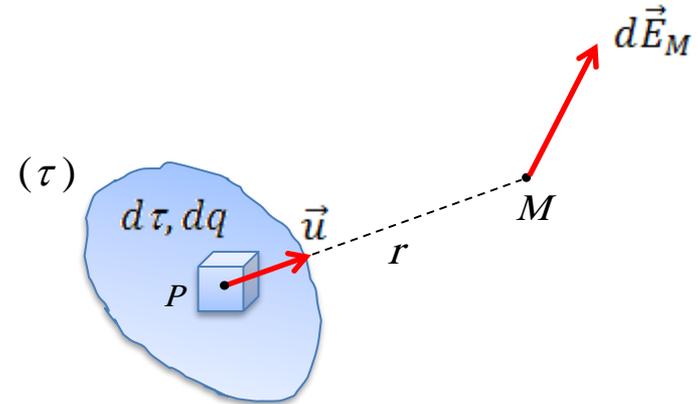
On en déduit le champ électrique créé par un plan chargé par  $\sigma$  :

$$E_{plan} = \lim_{R \rightarrow \infty} (E_{disque})$$

$$E_{plan} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & , z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & , z < 0 \end{cases}$$



## d) Distribution volumique ( $\rho$ )



$$d\vec{E}_M = k \frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

$$dq = \rho d\tau$$

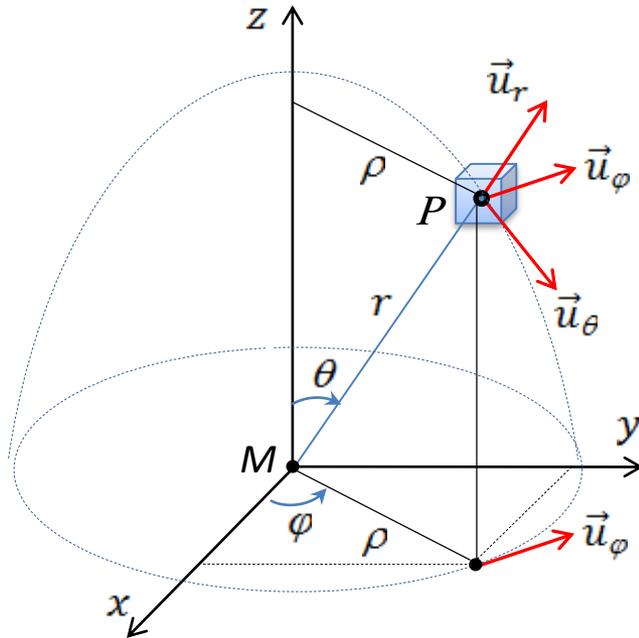
Le champ total est :

$$\vec{E}_M = k \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## Exemple :

Calcul du champ électrique, crée par une demi-sphère de rayon  $R$ , chargée par  $\rho$  uniforme, en un point situé au centre de la demi-sphère.



$$d\vec{E}_M = k \frac{dq}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \overrightarrow{PM}$$

$$dq = \rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

L'expression générale du champ électrique :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \phi) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \phi) \cdot \vec{u}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi) \cdot \vec{u}_\phi$$

Invariances :

$$\vec{E}_M = E_r(r, \theta) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta) \cdot \vec{u}_\theta + E_\phi(r, \theta) \cdot \vec{u}_\phi$$

Symétries :

$$\vec{E}_M = E_M(r, \theta) \cdot \vec{k}$$

$$M(0,0,0) , P \begin{cases} r \cos\phi \sin\theta \\ r \sin\phi \sin\theta \\ r \cos\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PM} = -r \cos\phi \sin\theta \cdot \vec{i} - r \sin\phi \sin\theta \cdot \vec{j} - r \cos\theta \cdot \vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{PM}\|^3 = r^3$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$d\vec{E}_M \cdot \vec{k} = k \frac{dq}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \cdot \vec{k}$$

$$d\vec{E}_M \cdot \vec{k} = d(\vec{E}_M \cdot \vec{k}) = dE_M(r, \theta) \quad , \quad \vec{PM} \cdot \vec{k} = -r \cos \theta$$

$$dE_M(r, \theta) = -k \frac{dq}{r^3} r \cos \theta$$

$$E_M(r, \theta) = -k \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi}{r^3} r \cos \theta$$

$$E_M(r, \theta) = -k \rho \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_1 = \int_0^R dr = R \quad , \quad I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

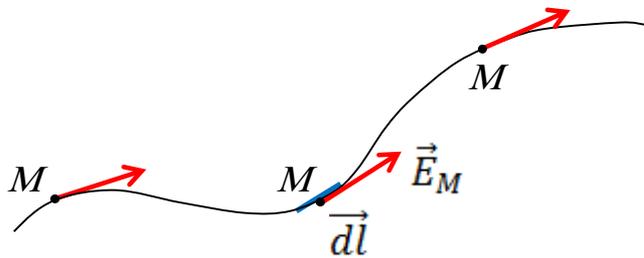
$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$E_M(r, \theta) = \frac{k \rho R 2\pi}{2} = \frac{\rho R}{4\epsilon_0}$$

## 8. Caractéristiques importantes entre le champ et le potentiel

### a) Lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe dont la tangente en tout point  $M$  est colinéaire au champ en ce point.

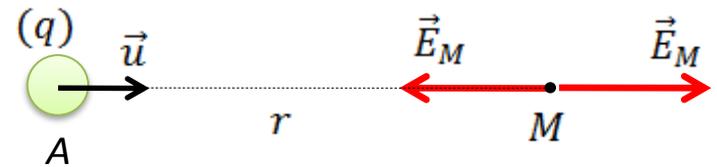


C'est la trajectoire du champ électrique.

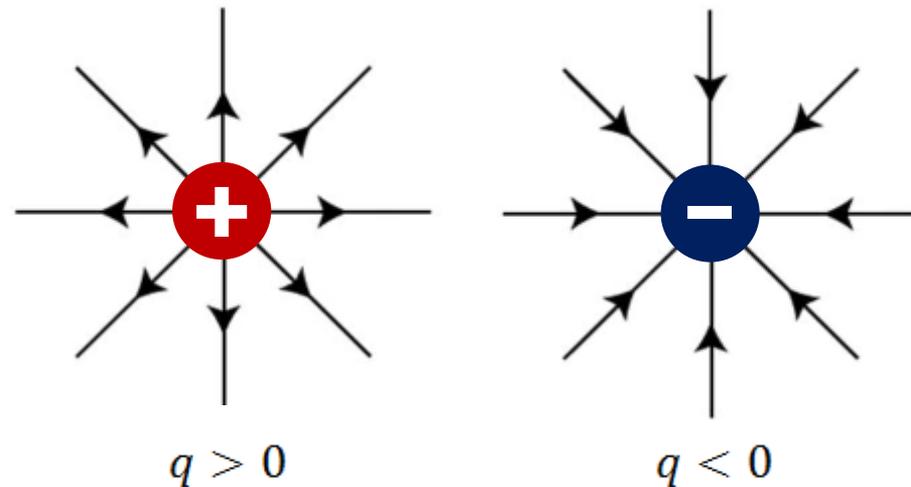
L'équation d'une ligne de champ est donnée par :

$$\vec{E}_M \wedge \vec{dl} = \vec{0}$$

Cas d'une charge ponctuelle :

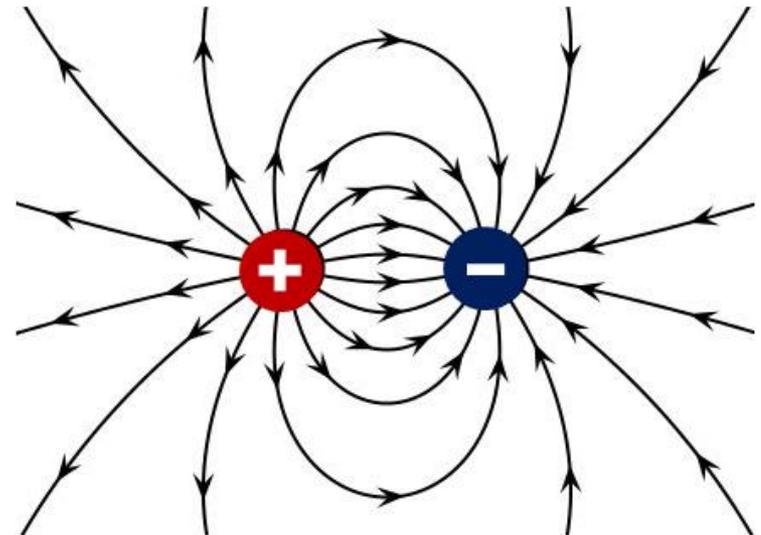
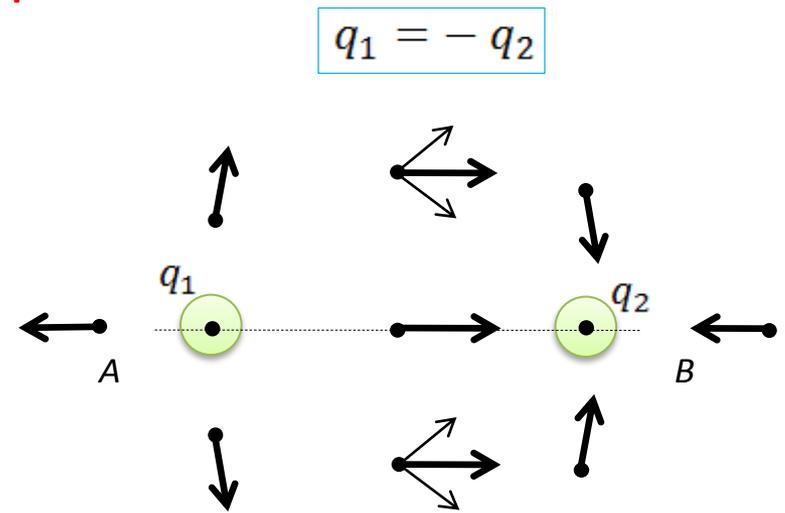
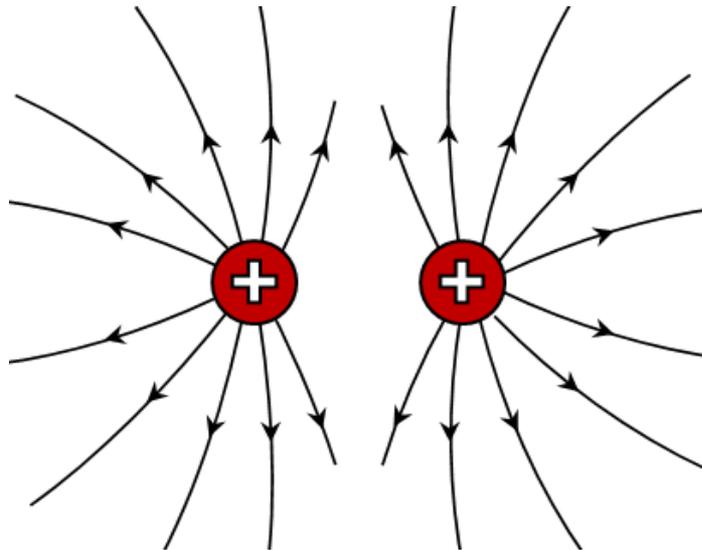
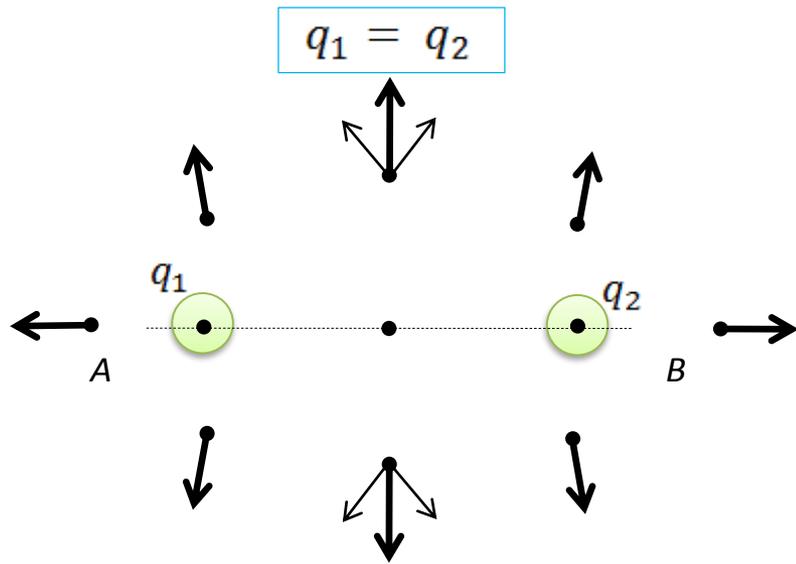


$$\vec{E}_M = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$



# Chapitre 1 : Electrostatique

Cas de deux charges ponctuelles :



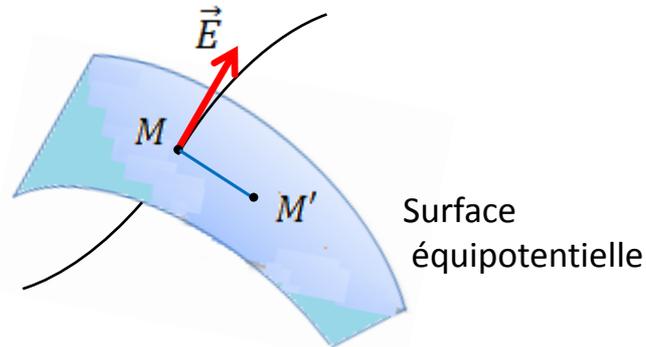
## b) Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est une zone de points  $M$  tels que :

$$V_M = Cste$$

Les surfaces équipotentielles sont toujours  $\perp$  aux lignes de champ.

**Dim :**



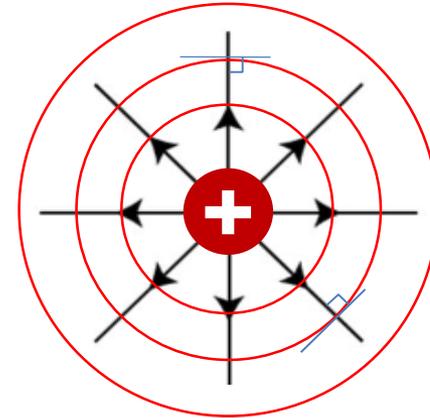
$$\overline{MM'} = \overline{dl} \quad dV = -\vec{E} \cdot \overline{dl}$$

$$\int_{V_M}^{V_{M'}} dV = - \int_{\overline{MM'}} \vec{E} \cdot \overline{dl}$$

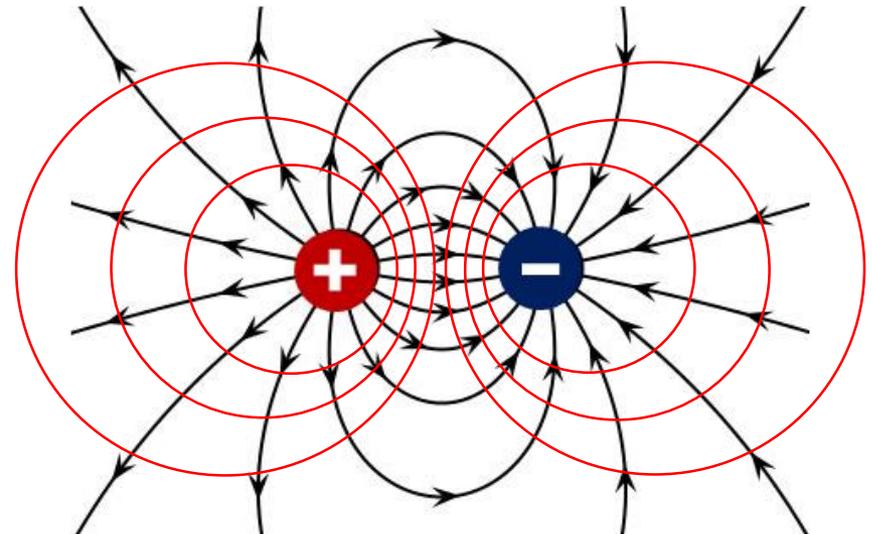
$$V_{M'} - V_M = \vec{E} \cdot \overline{MM'}$$

$$V_{M'} - V_M = 0 \rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \overline{MM'}}$$

**Cas d'une charge ponctuelle :**



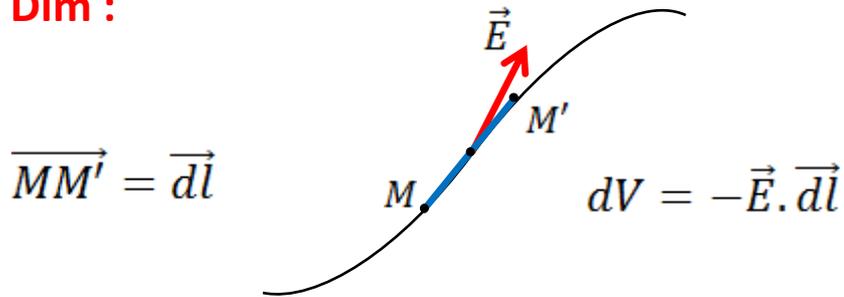
**Cas de deux charges ponctuelles :**



# Chapitre 1 : Electrostatique

c) Le potentiel diminue le long d'une ligne de champ !

Dim :



$$\int_{V_M}^{V_{M'}} dV = - \int_{\overline{MM'}} \vec{E} \cdot \overline{dl}$$

$$V_{M'} - V_M = -\vec{E} \cdot \overline{MM'}$$

$$V_{M'} - V_M = -\|\vec{E}\| \cdot \|\overline{MM'}\| \cdot \cos\alpha$$

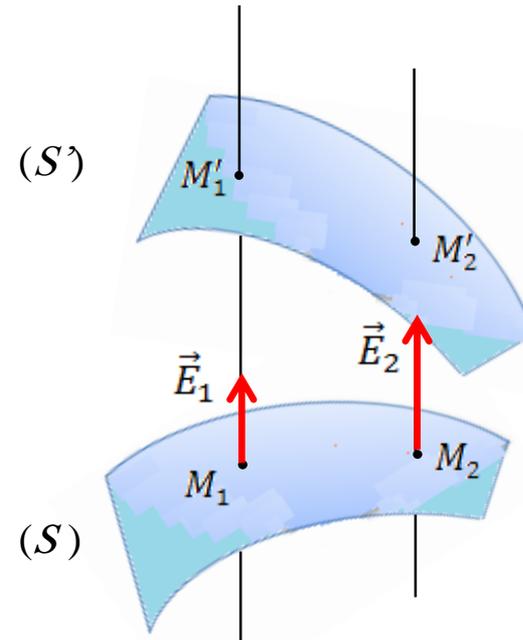
$$\cos\alpha \approx 1$$

$$V_{M'} - V_M = \|\vec{E}\| \cdot \|\overline{MM'}\| < 0$$

$$V_{M'} < V_M$$

d) Les surfaces équipotentielles se rapprochent lorsqu'on passe d'une zone dont le champ est inf. à une zone dont le champ est sup !

Dim :



$$V(M_1) = V(M_2)$$

$$V(M'_1) = V(M'_2)$$

$$\|\overline{M_1 M'_1}\| > \|\overline{M_2 M'_2}\|$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$dV_1 = -\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 \quad , \quad dV_2 = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2$$

$$\int_{V(M_1)}^{V(M'_1)} dV_1 = - \int_{\overrightarrow{M_1 M'_1}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1 M'_1}\|$$

$$\int_{V(M_2)}^{V(M'_2)} dV_1 = - \int_{\overrightarrow{M_2 M'_2}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -\|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2 M'_2}\|$$

$$\begin{cases} V(M'_1) - V(M_1) = -\|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1 M'_1}\| \\ V(M'_2) - V(M_2) = -\|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2 M'_2}\| \end{cases}$$

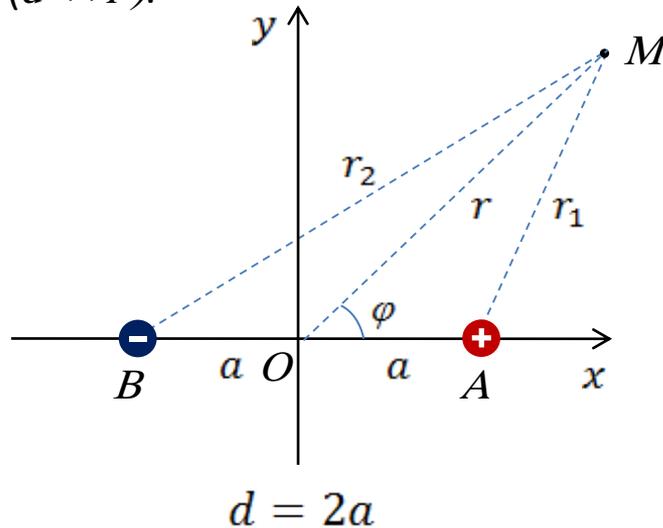
$$-\|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1 M'_1}\| + \|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2 M'_2}\| = 0$$

$$\|\vec{E}_1\| \cdot \|\overrightarrow{M_1 M'_1}\| = \|\vec{E}_2\| \cdot \|\overrightarrow{M_2 M'_2}\| \rightarrow \frac{\|\vec{E}_1\|}{\|\vec{E}_2\|} = \frac{\|\overrightarrow{M_2 M'_2}\|}{\|\overrightarrow{M_1 M'_1}\|}$$

$$\|\overrightarrow{M_1 M'_1}\| > \|\overrightarrow{M_2 M'_2}\| \rightarrow \|\vec{E}_1\| < \|\vec{E}_2\|$$

## 9. Dipôle électrostatique

Le dipôle électrostatique est un système composé de deux charges électriques de mêmes valeurs et de signes opposés ( $+q$ ) et ( $-q$ ), séparées par une distance ( $d$ ) très petite devant la distance ( $r$ ) jusqu'au point considéré du champ ( $d \ll r$ ).



### a) Calcul de $V$

$$V_1 = K \frac{q}{r_1}, \quad V_2 = -K \frac{q}{r_2}$$

$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = V_1 + V_2 = Kq \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = f(r, \varphi)$$

$$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM}, \quad \overline{BM} = \overline{BO} + \overline{OM}$$

$$r_1^2 = \|\overline{AM}\|^2 = \|\overline{AO}\|^2 + \|\overline{OM}\|^2 + 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OM}$$

$$\overline{AO} \cdot \overline{OM} = a \cdot r \cdot \cos(\pi - \varphi) = -ar \cdot \cos \varphi$$

$$r_2^2 = \|\overline{BM}\|^2 = \|\overline{BO}\|^2 + \|\overline{OM}\|^2 + 2 \cdot \overline{BO} \cdot \overline{OM}$$

$$\overline{BO} \cdot \overline{OM} = ar \cdot \cos \varphi$$

$$r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos \varphi$$

$$r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cdot \cos \varphi$$

$$r_1^2 = r^2 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cdot \cos \varphi \right)$$

$$r_2^2 = r^2 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} \cdot \cos \varphi \right)$$

$$d \ll r \rightarrow a \ll r \rightarrow \frac{a^2}{r^2} \approx 0$$

$$\varepsilon = \frac{2a}{r} \cdot \cos \varphi$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$r_1^2 = r^2(1 - \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}(1 - \varepsilon)^{-1/2}$$

$$r_2^2 = r^2(1 + \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}(1 + \varepsilon)^{-1/2}$$

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + \frac{n\varepsilon}{1!} + \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{2a}{r^2} \cdot \cos\varphi$$

$$V = \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\varphi$$

On définit le moment dipolaire du doublet de charges, le produit de la charge positive  $q$  par le vecteur  $\vec{BA}$  joignant la charge négative à la charge positive, soit :

$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$

$p = 2a \cdot q$

On obtient :

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\varphi$$

## b) Calcul de $E$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cos\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sin\varphi$$

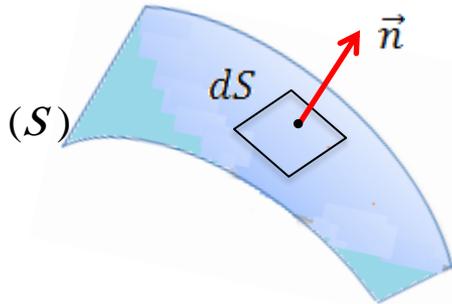
$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2\cos\varphi \cdot \vec{u}_r + \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi)$$

$$E = \|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\varphi + 1}$$

## 10. Théorème de Gauss (1777-1855)

### a) Représentation d'une surface par un vecteur

Soit un élément de surface  $dS$  et  $\vec{n}$  sa normale :

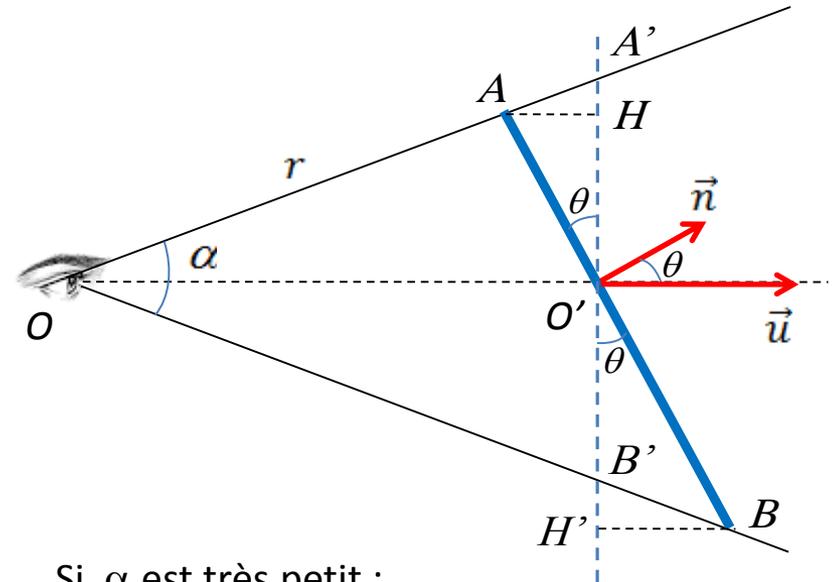


$$\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$$

### b) Notion d'angle solide

#### ☐ Angle dans le plan :

C'est l'angle sous lequel est vu un segment de droite depuis un point  $O$ .



Si  $\alpha$  est très petit :

$$\alpha \rightarrow d\alpha, AB \rightarrow dl, A'B' \rightarrow HH' = r \cdot d\alpha$$

$$\cos\theta = \frac{HO'}{AO'} = \frac{O'H'}{O'B'}$$

$$HO' = AO' \cos\theta, O'H' = O'B' \cos\theta$$

$$A'B' = HH' = AO' \cos\theta + O'B' \cos\theta$$

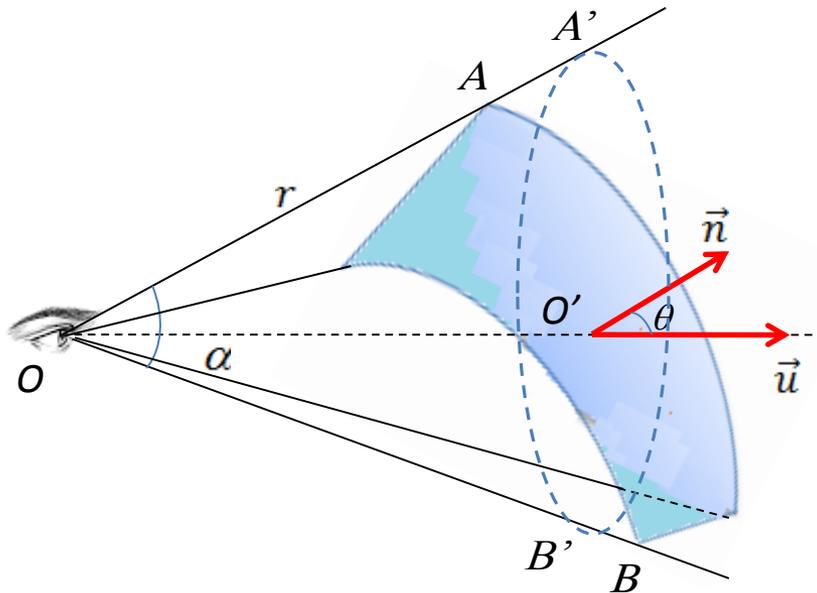
$$A'B' = AB \cos\theta \rightarrow r \cdot d\alpha = dl \cos\theta$$

$$d\alpha = \frac{dl \cos\theta}{r}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

## ❑ Angle dans l'espace (angle solide) :

C'est l'angle sous lequel est vu une surface depuis un point  $O$ .

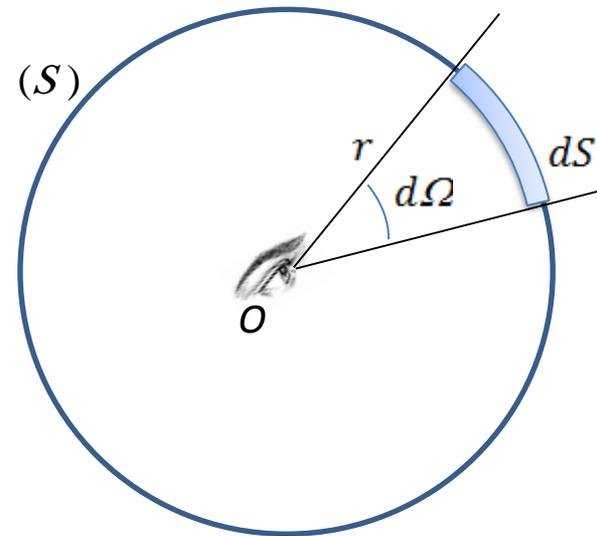


Par analogie avec la définition précédente, on définit l'angle solide  $d\Omega$  par :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$[\Omega] = \text{stéradian}$$

**Cas particulier** : l'angle solide de tout l'espace.



$$\theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1$$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \rightarrow \Omega = \int_S \frac{dS}{r^2} = \frac{S}{r^2}$$

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

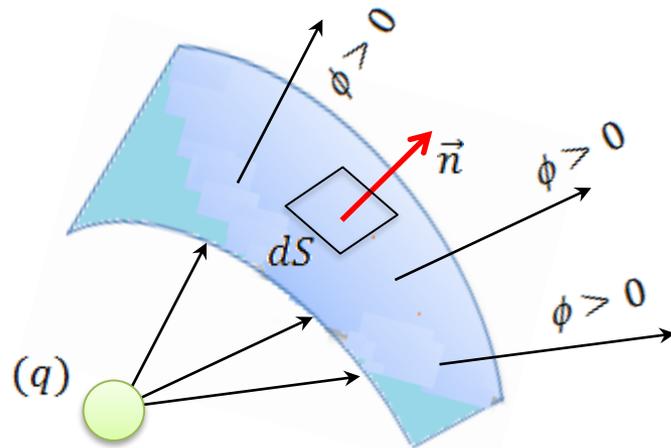
## c) Flux du vecteur champ électrique

On appelle flux du vecteur  $\vec{E}$  à travers  $dS$ , la quantité scalaire, positive ou négative :

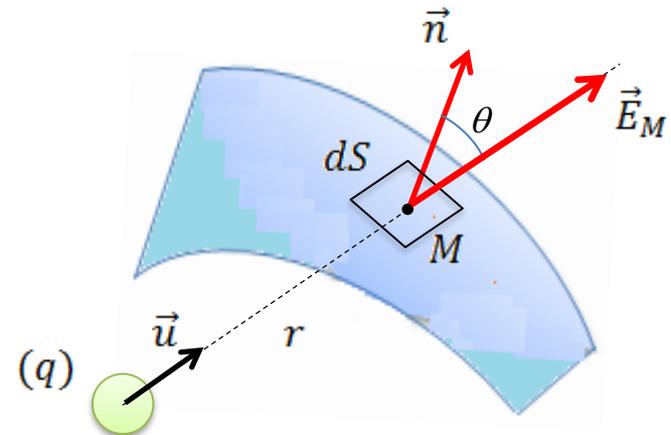
$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Le flux total à travers toute la surface est :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad , \quad [\phi] = V.m$$



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \rightarrow \phi = \sum_i \phi_i$$



$$\vec{E}_M = k \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

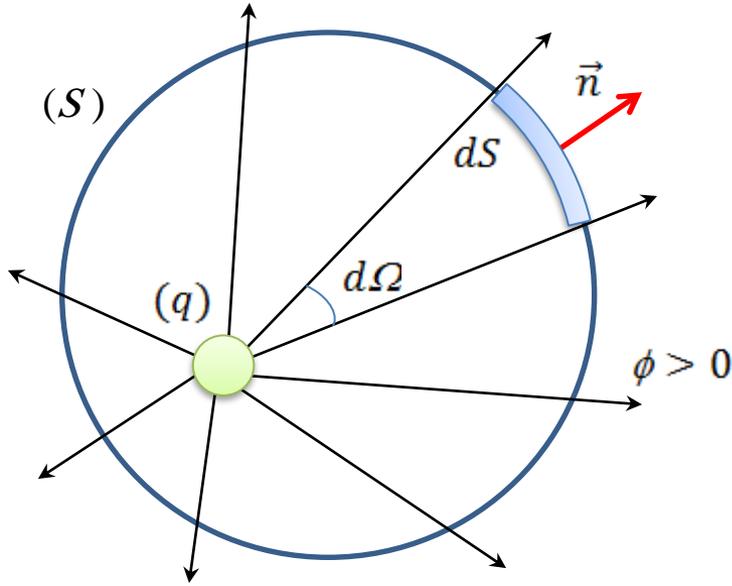
$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \cos\theta$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta dS}{r^2}$$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

□ Si  $q$  est à l'intérieur de la surface fermée :

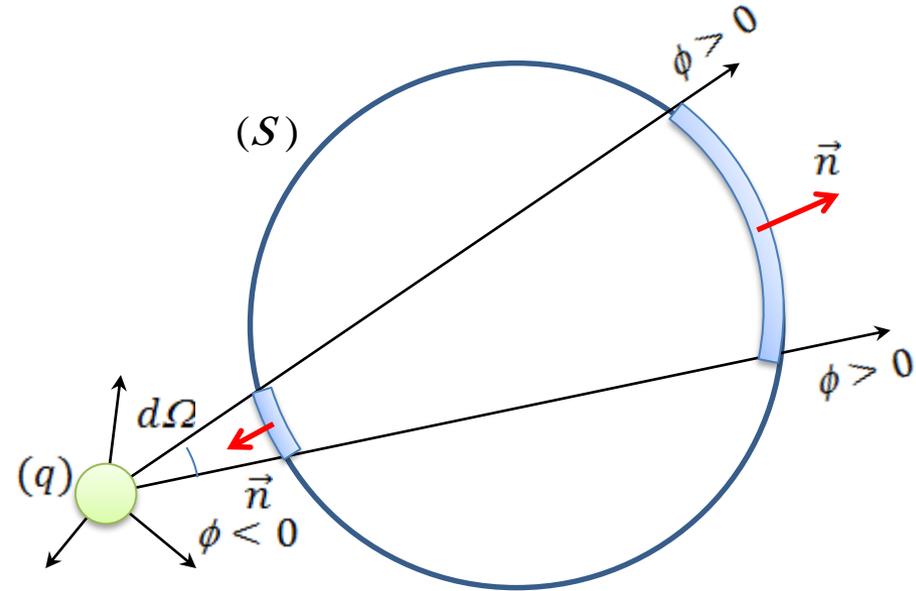


$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega \rightarrow \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Pour  $n$  charges à l'intérieur de la surface fermée :

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i^n q_i (\text{int})$$

□ Si  $q$  est à l'extérieur de la surface fermée :



$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= +\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = +\frac{q}{\epsilon_0} \\ \phi_2 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{4\pi} d\Omega = -\frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \phi = 0$$

Pour  $n$  charges à l'extérieur de la surface fermée :

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i^n q_i (\text{ext}) = 0$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G \quad , \quad \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i^n q_i (int)$$

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (int)$$

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface qui est imaginaire (surface de Gauss) sur  $\epsilon_0$ .

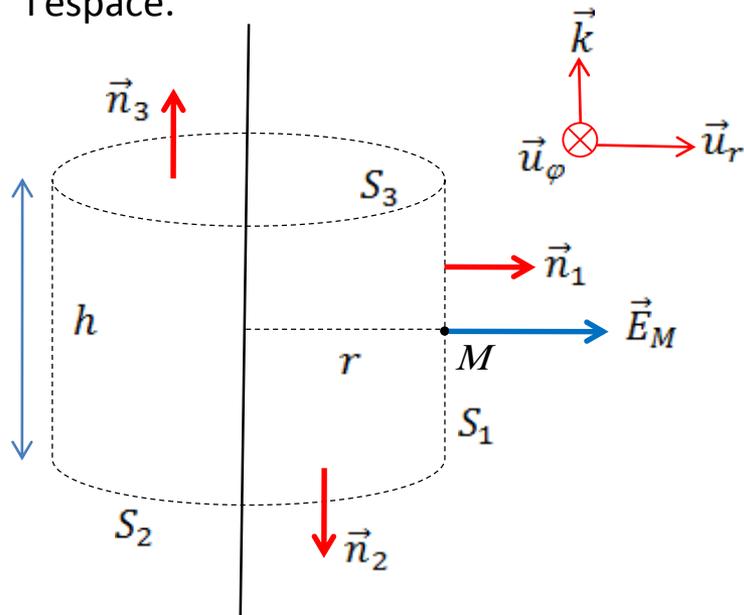
## Choix de la surface de Gauss

- Il faut que la surface de Gauss soit fermée,
- Il faut que cette surface passe par le point auquel on veut calculer le champ,
- En tout point de cette surface, il faut que le vecteur champ électrique soit parallèle à la normale à cette surface.

# Chapitre 1 : Electrostatique

## Exemple 1 :

Calcul du champ électrique, crée par un fil de longueur infinie et chargé par  $\lambda$  uniforme, en tout point de l'espace.



L'expression générale du champ électrique :

$$\vec{E} = E_r(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r, \varphi, z) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r, \varphi, z) \cdot \vec{k}$$

Invariances :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r + E_\varphi(r) \cdot \vec{u}_\varphi + E_z(r) \cdot \vec{k}$$

Symétries :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$\underbrace{\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G}_{T_1} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\sum_i q_i (int)}_{T_2}$$

$$T_1 = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G$$

$$= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_G + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 \cdot dS_G + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 \cdot dS_G$$

$$T_1 = \iint_{S_1} E_r(r) \cdot \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_1}_1 \cdot dS_G$$

$$+ \iint_{S_2} E_r(r) \cdot \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_2}_0 \cdot dS_G + \iint_{S_3} E_r(r) \cdot \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_3}_0 \cdot dS_G$$

$$T_1 = E_r(r) \iint_{S_1} dS_G = E_r(r) \cdot S_1 = E_r(r) \cdot 2\pi r \cdot h$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$T_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (\text{int}) = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$E_r(r) \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

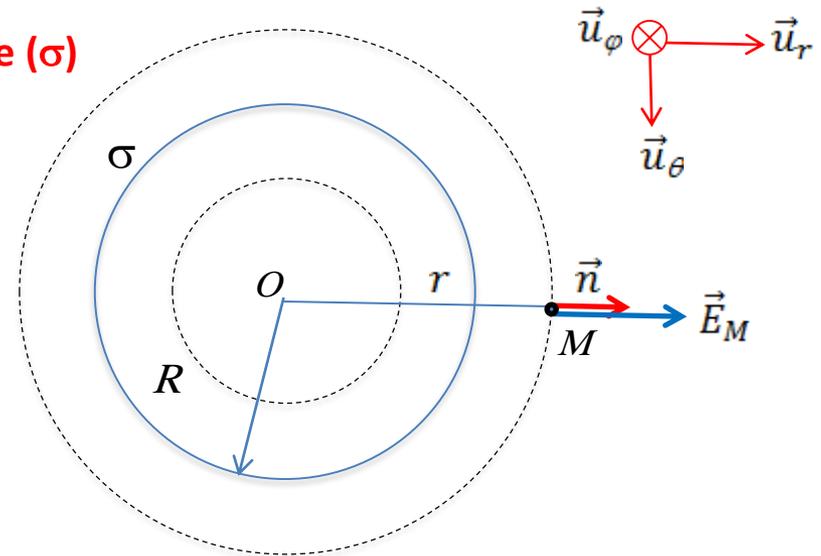
$$\vec{E}_M = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

## Exemple 2 :

1. Calcul du champ électrique crée par une sphère de rayon  $R$ , chargée par  $\sigma$  uniforme, en tout point de l'espace.

2. Il en est de même, pour une boule de rayon  $R$ , chargée par  $\rho$  uniforme.

## 1. La sphère ( $\sigma$ )



L'expression générale du champ électrique est :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\varphi$$

Invariances :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r) \cdot \vec{u}_\varphi$$

Symétries :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$\underbrace{\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G}_{T_1} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\sum_i q_i (\text{int})}_{T_2}$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

$$T_1 = \oiint_{S_G} E_r(r) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_G$$

$$= E_r(r) \cdot S_G = E_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

1°/ Au point  $M$  à l'extérieur de la sphère  $[R, +\infty[$

$$T_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (\text{int}) = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

$$E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

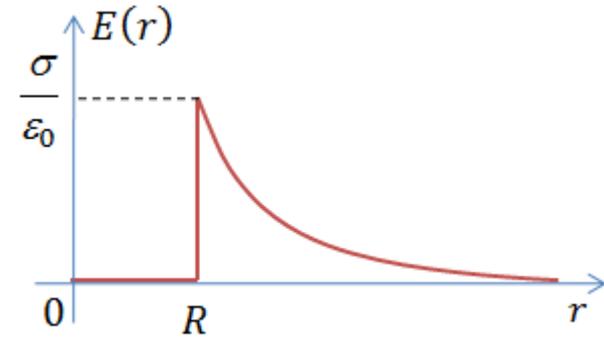
$$E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \rightarrow \vec{E}_M = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

2°/ Au point  $M$  à l'intérieur de la sphère  $[0, R]$

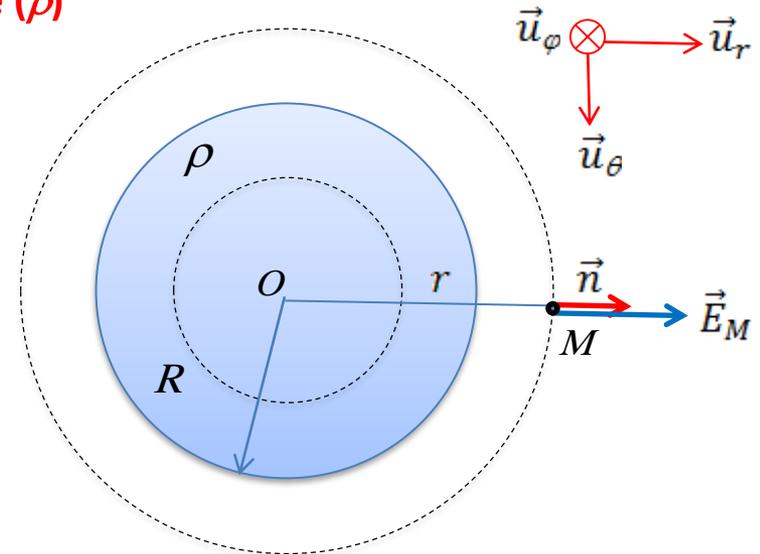
$$T_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (\text{int}) = 0$$

$$E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$E_r(r) = 0, \quad \vec{E}_M = \vec{0}$$



2. La boule ( $\rho$ )



L'expression générale du champ électrique est :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{u}_\varphi$$

# Chapitre 1 : Electrostatique

Invariances :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r + E_\theta(r) \cdot \vec{u}_\theta + E_\varphi(r) \cdot \vec{u}_\varphi$$

Symétries :

$$\vec{E}_M = E_r(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$\underbrace{\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS_G}_{T_1} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i (int)}_{T_2}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \oiint_{S_G} E_r(r) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_G \\ &= E_r(r) \cdot S_G = E_r(r) \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

1°/ Au point  $M$  à l'extérieur de la sphère  $[R, +\infty[$

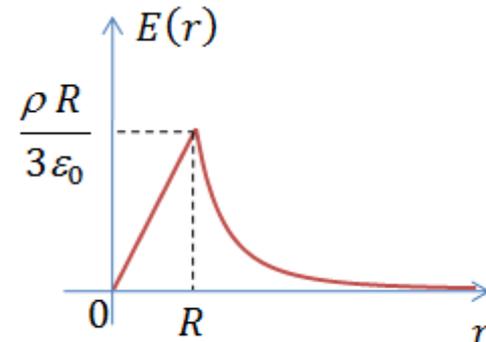
$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i (int) = \frac{\rho \cdot 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \\ E_r(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{\rho \cdot 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \rightarrow \vec{E}_M = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

2°/ Au point  $M$  à l'intérieur de la sphère  $[0, R]$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i (int) = \frac{\rho \cdot 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \\ E_r(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{\rho \cdot 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}_M = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r$$



**Merci de votre attention...**