Université de Mohamed Boudiaf M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module :Maths 02

Année Universitaire 2020-2021
Licence ST LMD ($1^{ère}$ année)

Série d'exercices N° 01: **Les intégrales** $\int f(x)dx$

Fonctions primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$.

Résumé: primitives des fonctions usuelles

la fonction f	Les fonctions primitives de f
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$x \mapsto g'(x) \times g(x)^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}g(x)^{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{g(x)'}{g(x)}$	$x \mapsto \ln\lvert g(x)\rvert + c$
$x \mapsto \frac{g(x)'}{g(x)^n}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)g(x)^{n-1}} + c$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + c$
$x \mapsto e^{ax+b}$	$x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
$x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$	$x \mapsto e^{g(x)} + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \mapsto \sqrt{g(x)} + c$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{a+x^2}, a > 0$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + c$
$x \mapsto \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$	$x \mapsto \arctan(g(x)) + c$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c$
$x \mapsto \cos(ax+b), a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c$
$x \mapsto \sin(ax+b), a \neq 0$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\frac{1}{\tan(x)} + c = -cotg(x) + c, \ cotg(x) = \frac{1}{tan(x)}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x) + c$
$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arccos(x) + c$
$x \mapsto ch(x)$	$sh(x) + c$
$x \mapsto sh(x)$	$ch(x) + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$Argsh(x) + c$

Exercice 01

Montrer que F est une primitive de la fonction f dans les cas suivants:

1. $F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ et $f(x) = \arcsin(x)$.
2. $F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et $f(x) = \arctan(x)$.

Intégrale indéfinies, Intégrale définies

⋆ Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$ dans ce cas on pose

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c \quad \in \mathbb{R}}$$

⋆ Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est le nombre réale

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

oú F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$.

Exercice 02

Calculer les intégrales suivantes

1. $\int \frac{1-\cos(x)}{x-\sin(x)}dx$.
2. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$.
3. $\int \cos(x)\sin^3(x)dx$.
4. $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$
5. $\int e^{3x+2}dx$.
6. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}dx$.
7. $\int_0^{\pi} \cos(nx)dx$.
8. $\int \left(\frac{1}{\sin^2(x)} + x\right)dx$.
9. $\int_{-2}^{3} |x-1|dx$

Intégration par changement de variable

Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $x \mapsto g'(x)f[g(x)]$ est intégrable et l'on a

$$\int g'(x)f[g(x)]\,dx = F[g(x)] + c$$

Autrement dit, en posant $t = g(x)$ on obtient $\frac{dt}{dx} = g'(x)$, soit encore $dt = g'(x)dx$ et donc

$$\boxed{\int g'(x)f[g(x)]\,dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F[g(x)] + c}$$

Exercice 03

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln(x))^2}}dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$

Intégration par partie

⋆ Soient u et v deux fonctions, de classe C^1. Alors

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

⋆ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient u et v deux fonctions définies sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice 04

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ (examen 2019).
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$ (examen 2016).
3. $\displaystyle\int xe^{-x}dx$.(examen 2019)
4. $\displaystyle\int x\ln(x)dx.$
5. $\displaystyle\int e^x cos(x)dx.$
6. $\displaystyle\int \arctan(x)dx.$

Exercice 05: Primitives des fonctions rationnelles

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{3x-5}{(x-1)(x+1)}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5}dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-3x+2}dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-6x+9}dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}dx.$
7. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x-1)^2(x+5)}$
8. $\displaystyle\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+1)}$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)}dx.$

Exercice 06: Intégrale des fonctions exponentielles

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$
2. $\displaystyle\int (x^2-3x+1)e^{-x}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{sh(x)}dx$

Primitives de la forme $\int sin(x)^p cos(x)^q dx$

- Si p est impair, on peut poser $t = \cos x$
- Si q est impair, on peut poser $t = \sin x$
- Si p et q sont impairs, on peut poser $t = \cos x$ ou $t = \sin x$ ou $t = \cos 2x$.
- Si p et q sont pairs, on pourra linéariser, puis intégrée.

Exercice 07

Calculer les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int sin^3(x)cos^2(x)dx$
2. $I_2 = \int sin^2(x)cos^3(x)dx$
3. $I_3 = \int sin^3(x)cos(x)dx$
4. $I_4 = \int sin^2(x)cos^2(x)dx$

Primitives de la forme $\int cos(px)\cos(qx)dx$, $\int \sin(px)\sin(qx)dx$, $\int cos(px)\sin(qx)dx, p, q \in \mathbb{Z}$

On transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin(p)\cos(q) = \frac{1}{2}(\sin(p+q) + \sin(p-q))$
- $\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}(\cos(p-q) - \cos(p+q))$
- $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}(\cos(p+q) + \cos(p-q))$

Exercice 08

Calculer l'intégrale

1. $I_1 = \int sin(2x)cos(3x)dx$

Primitives de la forme $\int \frac{P(cos(x), sin(x))}{Q(cos(x), sin(x))}dx$

Soient P et Q sont des polynômes. Il existe deux méthodes pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \frac{P(cos(x), sin(x))}{Q(cos(x), sin(x))}dx$$

Méthode 01: les règles de Bioche

les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours On note $\omega(x) = f(x)dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = cosx$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = sinx$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = tanx$.

Exercice 09

Calculer les intégrales suivantes

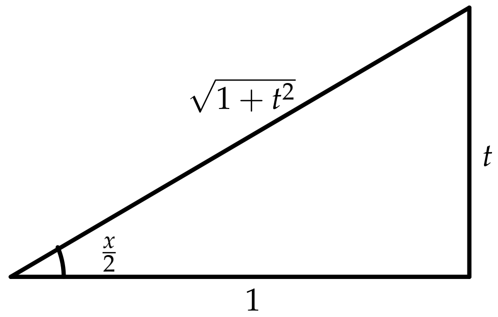
1. $I_1 = \int \frac{1}{\sin x}dx.$
2. $I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos(x)}dx.$
3. $I_3 = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)+1}dx.$

Méthode 02: le changement de variable $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Le changement de variable $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.
Si on pose $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on trouve

$\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}dt}$, $\boxed{\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}}$,

$\boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$, $\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$



Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{2+cos(x)}dx$