Université de M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques
Module : Introduction à la théorie de groupes **2020/2021**

Série 01

Exercice 01

1. Déterminer les quels des ensembles des nombres suivants sont des groupes muni des opérations donneés. Pour chaque groupe préciser l'élément neutre et l'élément symétrique de chaque élément.

$a)$ $\{1\}$, multiplication.
$b)$ Les rationnels non nuls, multiplication.
$c)$ Les rationnels, addition.
$d)$ Les rationnels, multiplication.
$e)$ $\{-1, 1\}$, multiplication.
$f)$ $\{-1, 0, 1\}$, addition.
$g)$ L'ensemble des entiers relatifs, multiplication.
$h)$ $M_{10} = \{n/n = 10k, k \in \mathbb{Z}\}$, addition.
$i)$ Les rationnels non nuls, division.
$j)$ L'ensemble des entiers relatifs, soustraction.

2. Vérifier que l'ensemble $\{2^m/m \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication est un groupe. De même avec l'ensemble $\{2^m 3^n/m, n \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication.

3. Vérifier que $M(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} /a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ avec l'addition des matric es est un groupe.

4. On note par $M(S)$ l'ensemble des applications de l'ensemble S vers S. Montrer que si $|S| > 1$, alors $(M(S), \circ)$ n'est pas un groupe.

Exercice 02

1. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha \neq 0$, soit $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \alpha x + \beta$. On note par A l'encemble de ces applications. Montrer que $(A, \circ)$ est un groupe.

2. On note par $GL(2, \mathbb{R}) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : \det(M) \neq 0\}$. Monter que $(GL(2, \mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

3. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux éléments de $GL(2, \mathbb{R})$. Calculer $ord(M), ord(N), ord(M \times N)$.

Exercice 03

1. Soit G un groupe et A une partie non vide de G.

Soit $\langle A \rangle = \{x = a_1 a_2 ... a_n / n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall i \in \{1, ..., n\}, a_i \in A \cup A^{-1}\}$ avec $A^{-1} = \{a^{-1} / a \in A\}$.
Montrer que $\langle A \rangle$ est le plus petit sous groupe de G contenant A.

2. Soit $G = (\mathbb{Z}, +)$.

– Pour $A = \{9, 12\}$, montrer que $\langle \{9, 12\} \rangle = \langle \{3\} \rangle$.
– Pour $A = \{2, 5\}$, montrer que $\langle \{2, 5\} \rangle = \mathbb{Z}$.

3. Soit $a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z}$ deux sous groupes de $\mathbb{Z}$.

Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ avec $d = p\operatorname{gcd}(a, b)$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ avec $m = ppcm(a, b)$.

Exercice 04

1. Montrer que H est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ si, et seulement si $H = n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif, on considère deux sous groupes H_1 et H_2 de G et on désigne par : $H_1 + H_2 = \{x + y / x \in H_1, y \in H_2\}$.

Montrer que H_1+H_2 est le plus petit sous groupe de G contenant $H_1 \cup H_2$ i. e $H_1 + H_2 = \langle H_1 \cup H_2 \rangle$.

3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H, K deux sous groupes de G. On désigne par : $H \cdot K = \{x \cdot y / x \in H, y \in K\}$.

Montrer que $H \cdot K$ est un sous groupe de G, si, et seulement si $H \cdot K = K \cdot H$.

Exercice 05

Soit $(S_n, \circ)$ le groupe des permutations de n éléments.

1. Pour $n = 3$, combien d'éléments de S_3 applique 3 sur 3.

2. Combien d'éléments de S_n laisse l'élément n fixé.

3. Montrer que le cycle $(a_1 a_2 ... a_k)$ s'écrit de la forme $(a_1 a_k) ... (a_1 a_3)(a_1 a_2)$, pour $1 \leq k \leq n$.

4. En déduire que S_n est engendré par les transpositions. (Expliquer pourquoi on a, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ si α, β sont des cycles disjoints).

Exercice 06

1. On note $(S_n, \circ)$ le groupe des permutations de n éléments. Montrer que $|S_n| = n!$.

2. Pour $n = 3$, calculer les éléments de S_3. Construire la table de Cayley de $(S_3, \circ)$. Montrer que $(S_3, \circ)$ n'est pas commutatif.

3. Soient $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ deux éléments de S_4. Calculer les éléments suivants :

$\alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}, \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}, (\alpha \circ \beta)^{-1}, (\beta \circ \alpha)^{-1}$.

4. Ecrire les éléments suivants sous forme de cycles disjoints. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = (12)(13), \gamma = (145)(1235)(13), \delta = (145)(1235)^{-1}(13)$.

5. Ecrire d'inverse de $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)$ sous forme de cycle.

Exercice 07

Soit $(G_1, *)$, (G_2, Δ) deux groupes.

1. Montrer que $(G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe muni de l'opération définie par : pour $(x, y), (x', y') \in G_1 \times G_2, (x, y) \cdot (x', y') = (x * x', y\Delta y')$.
2. Citer les éléments de $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.
3. Citer les éléments du sous groupe cyclique $\left\langle \left((1, 2), \overline{1}\right) \right\rangle$ du groupe $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.
4. Citer les éléments de sous groupe cyclique $\left\langle \left(\overline{2}, \overline{2}\right) \right\rangle$ du groupe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$.

Exercice 08

Soit a un élément d'un ensemble E et soit $H = \{f \in S(E) : f(a) = a\}$. Montrer que H est un sous groupe de $(S(E), \circ)$.

Soit G un groupe fini de cardinal n.

1. Montrer que $\forall x \in G : x^n = e$ où e est l'élément neutre de G.
2. Montrer que si n est premier, alors G est cyclique. déterminer les générateurs de G.
3. Soient H_1, H_2 deux sous groupe finis de G d'ordre respectifs n_1, n_2. Montrer que si $n_1$et n_2 sont premier entre eux, alors l'intersection $H_1 \cap H_2$ est réduite à $\{e\}$.

Exercice 09

Soit $G = (S_3, \circ)$ et $H = \langle(13)\rangle$.

1. Déterminer les classes à droite modulo H dans G $((G/H)_d)$.
2. Déterminer les classes à gauche modulo H dans G $((G/H)_g)$.
3. Verifier que $(G/H)_d \neq (G/H)_g$ et que $|(G/H)_d| = \left|(G/H)_g\right|$.
4. En déduire $(G : H)$ l'indice de H dans G.