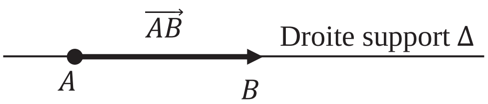
1- Les vecteurs :

a). Définitions :

Un *scalaire* est un nombre réel, pouvant être utilisé pour mesurer une grandeur (vitesse, température, durée, etc.)

Un *vecteur* est une représentation graphique, dans le plan ou l'espace, délimitée par une origine et une extrémité.



Un *vecteur* est défini par :

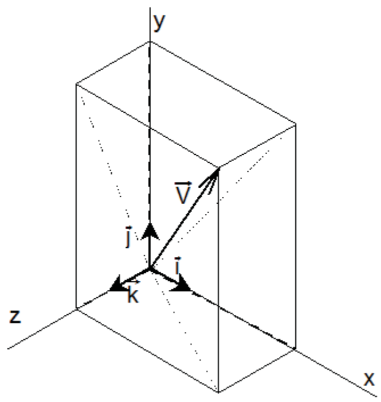
- sa direction
- son sens
- sa norme (ou intensité)

exemple :

droite Δ

de A vers B

$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B)$



Soit R un repère orthonormé direct, de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Soit $\vec{V}$ un vecteur de coordonnées cartésiennes a, b et c. Il existe plusieurs notations :

$\vec{V}(a;b;c)$ $\quad \vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V}\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right.$ $\quad \vec{V} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath} + c.\vec{k}$

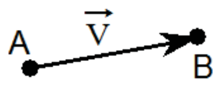
c). Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(a;b;c)$. Sa norme se note $\|\vec{V}\|$.

$$\|\bar{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

d). Calcul à partir des coordonnées de deux points

Soient le point $A\begin{pmatrix}X_A\\Y_A\\Z_A\end{pmatrix}$ l'origine d'un vecteur libre $\vec{V}$, et le point $B\begin{pmatrix}X_B\\Y_B\\Z_B\end{pmatrix}$ l'extrémité de ce vecteur.



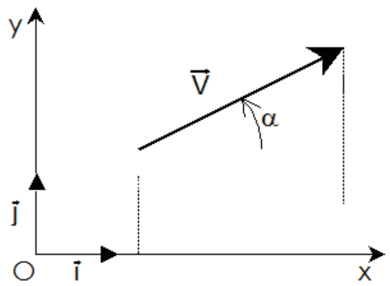
$$\vec{V}\begin{pmatrix}X_B - X_A\\Y_B - Y_A\\Z_B - Z_A\end{pmatrix}$$

$\vec{V}$ peut se noter également $\overrightarrow{AB}$.

e). Propriétés

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Projection d'un vecteur dans un repère plan



Exprimer les coordonnées de $\vec{V}$ en fonction de $\|\vec{V}\|$ et de α dans le repère (Oxy) revient à *projeter* le vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V}\begin{pmatrix}\|\vec{V}\|.\,cos\alpha\\\|\vec{V}\|.\,sin\alpha\end{pmatrix}$$

Cette expression est valable si α est mesuré entre l'axe x et le vecteur $\vec{V}$ dans le sens trigonométrique.

f). Vecteur nul

Un vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues est appelé *vecteur nul*. Il est noté $\vec{0}$.

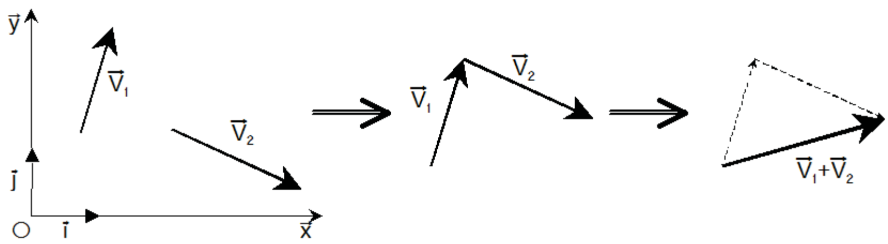
$$\vec{0}\ (0 ; 0 ; 0)$$

2- Opérations sur les vecteurs:

a). Somme et soustraction de vecteurs

Soient $\vec{V_1}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{pmatrix}$, alors $\vec{V_1}+\vec{V_2}\begin{pmatrix}X_1+X_2\\Y_1+Y_2\\Z_1+Z_2\end{pmatrix}$ et $\vec{V_1}-\vec{V_2}\begin{pmatrix}X_1-X_2\\Y_1-Y_2\\Z_1-Z_2\end{pmatrix}$

Graphiquement, faire la somme de deux vecteurs revient à les placer bout à bout :

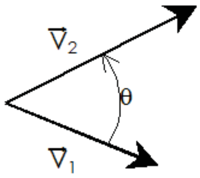


La somme de vecteurs est commutative :$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$.

b). Produit d'un vecteur par un scalaire

Multiplier un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire k revient à additionner k fois le vecteur $\vec{V}$.
Exemple : 3. $\vec{V} = \vec{V} + \vec{V} + \vec{V}$

c). Produit scalaire de deux vecteurs



$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \| \vec{V}_1 \| . \| \vec{V}_2 \| . \cos(\theta)$$

Remarques :

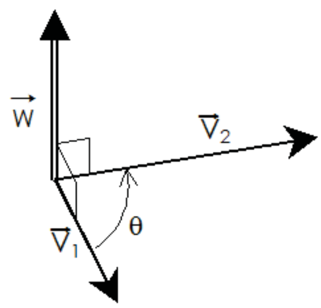
- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.
- Attention, le produit scalaire se note '.' (point). La croix 'x' est réservée à une autre opération.

Soient : $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = X_1.X_2 + Y_1.Y_2 + Z_1.Z_2$

d). Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel se note $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ ou $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$. Le résultat est un **vecteur**.

Soient $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$



$\vec{W}$ est défini par :

- sa direction, perpendiculaire au plan formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$;
- son sens, tel que le trièdre $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W}$ soit direct ;
- sa norme, $\vec{W}\| = \| \vec{V}_1 \| . \| \vec{V}_2 \| . \sin(\theta)$.

$$\vec{W} \left| \begin{array}{l} Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2 \\ Z_1.X_2 - X_1.Z_2 \\ X_1.Y_2 - Y_1.X_2 \end{array} \right.$$

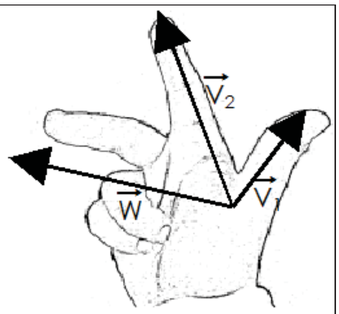
Attention !
$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \times \vec{V}_1$

Trièdre direct :
En utilisant la **main droite**, on peut modéliser :

le vecteur $\vec{V}_1$ avec le **pouce** ;

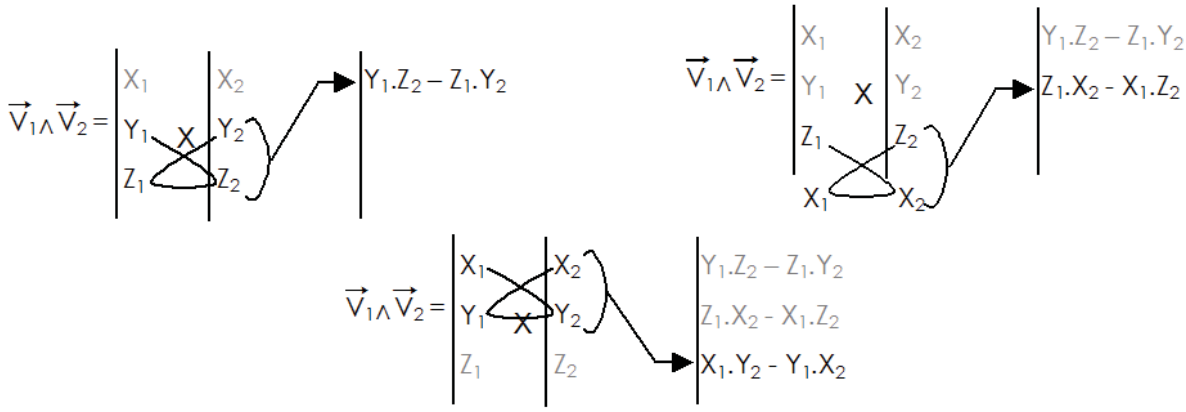
- le vecteur $\vec{V}_2$ avec l'**index** ;

Le **majeur** donne alors le sens de $\vec{W}$, résultat du produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$.



Méthode pratique pour appliquer le produit vectoriel :

On effectue le « produit en croix ».



<u>Exemples :</u>

$$\vec{V}_1 \left| \begin{array}{c} 6 \\ -2 \\ 3 \end{array} \right. \qquad \vec{V}_2 \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right. \qquad \vec{W} \left| \begin{array}{l} (-2)\mathrm{x}(-2) - 3\mathrm{x}1 = 1 \\ (3\mathrm{x}2) - (6\mathrm{x}(-2)) = 18 \\ (6\mathrm{x}1) - ((-2)\mathrm{x}2) = 10 \end{array} \right.$$

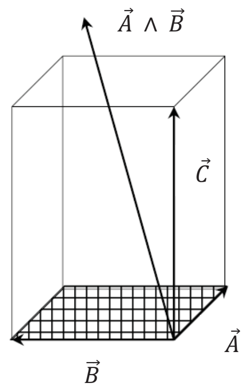
$$\vec{V}_1 \left| \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 4 \end{array} \right. \qquad \vec{V}_2 \left| \begin{array}{c} -5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right. \qquad \vec{W} \left| \begin{array}{c} -45 \\ -34 \\ -3 \end{array} \right.$$

<u>*d).* Produit mixte</u>

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ une quantité scalaire M égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$M = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.



Comme le volume du parallélépipède peut être évalué à partir d'un quelconque des faces, on a :

$$\begin{aligned} M &= (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} \\ &= (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} \\ &= (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est commutatif, on peut écrire :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

On peut donc intervertir la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle.

f. Dérivée d'un vecteur

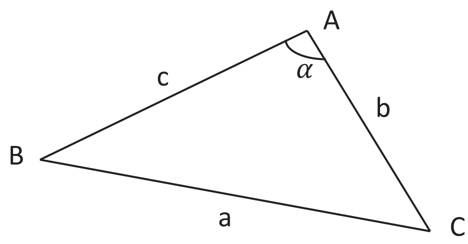
Soit une variable t, supposons qu'à chaque valeur de t on sache faire correspondre un certain vecteur $\vec{A}$, on dit que ce vecteur est fonction de t : $\vec{A}(t)$. Analytiquement, cela veut dire que l'on se donne trois fonctions $X(t), Y(t), Z(t)$ de la variable t qui sont les coordonnées du vecteur $\vec{A}$. Alors la dérivée du vecteur $\vec{A}$, par rapport à la variable t est donnée par le vecteur $\vec{A}' = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{dt}$.
On voit immédiatement que les composantes de $\vec{A}'$ sont données par :
$X' = \frac{dX}{dt}$, $Y' = \frac{dY}{dt}$, $Z' = \frac{dZ}{dt}$

Exercices

Exercice 01 :

Retrouver dans un triangle quelconque la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



Solution :

On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Or $a^2 = c^2 + 2cb\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) + b^2$

l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \pi - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\cos\alpha$

d'où l'expression

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Exercice 02 :

Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{V}_1(1{,}1{,}2)$ et $\vec{V}_2(0{,}1{,}1)$.

Solution:

On a le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| \cdot \left|\vec{V}_2\right| \cdot \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

d'où $\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{0+1+2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2} \times \sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

on a $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = arcos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Exercice 03 :

Déterminer le module et les cosinus directeurs du vecteur $\vec{V}(9{,}5{,}2)$.

Solution:

Les cosinus directeurs se sont les angles que fait le vecteur $\vec{V}$ avec chaque axe du repère orthonormé $Oxyz$. tel que:

$$|\vec{V}| = \sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{110}$$

$$\cos\alpha_x = \frac{x}{|\vec{V}|} = \frac{9}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{110}}$$

$$\cos\alpha_y = \frac{y}{|\vec{V}|} = \frac{5}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{110}}$$

$$\cos\alpha_z = \frac{y}{|\vec{V}|} = \frac{2}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{110}}$$

Exercice 04 :

Déterminer la distance entre les points $A(3, -2,0)$ et $B(-2,1, -3)$.

Solution:

La détermination de la distance entre deux points A et B revient a trouvé le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ formé par ces deux points, tel que :

si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

pour l'exercice on a $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (1+2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43}$

Exercice 05 :

On donne les vecteurs $\vec{V}_1(1, -2,0)$; $\vec{V}_2(2,2, -1)$.

1) Déterminer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$

2) Déterminer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Solution:

1) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = (1 \times 2) + (-2 \times 2) + (0 \times -1) = -2$

2) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{W}(Y_1Z_2 - Z_1Y_2, Z_1X_2 - X_1Z_2, X_1Y_2 - Y_1X_2) = \vec{W}(2, -1,6)$

Exercice 06 :

Calculer le volume construit sur les vecteurs:
$\vec{V}_1(2, -1, -5)$; $\vec{V}_2(4,5,3)$; $\vec{V}_3(3,3,2)$

Solution :

Le volume correspond au produit mixte $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

d'où

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 \, unités \; de \; volume$$

Exercice 06 :

On donne $\vec{V}_1 = [\sin(2\omega t + 1)]\vec{\imath} + e^{-3t}\vec{\jmath} + (t^2 + 1)\vec{k}$

$\vec{V}_1 = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$\lambda = e^{-t}$

Déterminer les dérivées $\frac{d\vec{V}_1}{dt}$, $\frac{d\vec{V}_2}{dt}$, $\frac{d}{dt}\left[\lambda\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)\right]$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right)$

Solution :

$$\frac{d\vec{V}_1}{dt} = [2\omega\cos(2\omega t + 1)]\vec{\imath} - 3e^{-3t}\vec{\jmath} + 2t\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}_2}{dt} = -\omega sin(\omega t)\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)\right] = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[\sin(2\omega t + 1) + \cos(\omega t)]\boldsymbol{\vec{\imath}} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[e^{-3t} - 2t]\boldsymbol{\vec{\jmath}} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[t^2 + 4]\boldsymbol{\vec{k}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[\sin(2\omega t + 1) \cdot \cos(\omega t)] + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[e^{-3t} \cdot 2t] + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}[(t^2 + 1) \cdot 3]$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\vec{\imath}} & \boldsymbol{\vec{\jmath}} & \boldsymbol{\vec{k}} \\ \sin(2\omega t + 1) & e^{-3t} & t^2 + 1 \\ \cos(\omega t) & -2t & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\vec{W}}$$

ensuite prendre la dérivée $\frac{d\vec{W}}{dt}$