CHAPITRE 1

ETUDE D'UN PROBLÈME DE CAUCHY

1.1 Préliminaires à l'existence et l'unicité des solutions

On commence à étudier le problème de la valeur initiale suivant

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $f(x,y)$ sera supposée continue dans un domaine D contenant le point (x_0, y_0). Par une solution de (1.1.1) dans un intervalle J contenant x_0, on signifie une fonction $y(x)$ satisfaisant :

1. $y(x_0) = y_0$.
2. $y'(x)$ existe pour tout $x \in J$.
3. Pour tout $x \in J$, les points $(x, y(x)) \in D$.
4. $y'(x) = f(x, y(x))$ pour tout $x \in J$.

Pour le problème de la valeur initiale (1.1.1) plus loin, on va montré que la continuité de la fonction $f(x,y)$ est suffisante pour l'existence d'au moins une solution dans un voisinage suffisamment petit du point (x_0, y_0). Si $f(x,y)$ n'est pas continue, alors la nature des solutions de (1.1.1) est tout à fait arbitraire. Par exemple, le problème de la valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}(y-1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

n'a pas de solution, alors que le problème

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}(y-1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

admet une infinité de solutions $y(x) = 1 + cx^2$ où c est une constante arbitraire.

Nous aurons besoin du résultat suivant pour prouver l'existence, l'unicité et plusieurs autres propriétés des solutions du problème de valeur initiale (1.1.1).

Théorème 1.1.1. *Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le domain D, alors toute solution de (1.1.1) est aussi une solution de l'equation d'intégrale :*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{1.1.2}$$

et inversement.

Démonstration. Supposons que y est une solution du problème (1.1.1), alors on a $y'(x) = f(x, y(x))$. Par un intégration simple on obtient :

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Inversement, si y est une solution de l'équation (1.1.2), alors on a $y(x_0) = y_0$ et comme $f(x, y)$ est continue, en dérivant (1.1.2), on obtient $y'(x) = f(x, y(x))$. □

Si la continuité de la fonction $f(x, y)$ est suffisante pour l'existence d'une solution de (1.1.1), mais elle n'implique pas l'unicité.

Par exemple, la fonction $f(x, y) = y^{2/3}$ est continue dans tout le plan, mais le problème $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions $y(x) \equiv 0$ et $y(x) = \frac{x^3}{27}$. Pour garantir l'unicité, nous commencerons par l'hypothèse que la variation de la fonction $f(x, y)$ par rapport à y reste bornée, c.à.d.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D. \tag{1.1.3}$$

On dit que la fonction $f(x, y)$ satisfait une condition de Lipschitz uniforme dans n'importe quel domaine D si l'inégalité (1.1.3) est vraie pour toutes les paires de points (x, y_1), (x, y_2) dans D ayant le même x. La constante positive L est appelée constante de Lipschitz.

Pour prouver l'existence, l'unicité et plusieurs autres propriétés des solutions de (1.1.1), on aura également besoin d'une inégalité intégrale de type Gronwall, qui est le résultat suivant

Lemme 1.1.1. *Soit* u, p *et* q *sont des fonctions continues positives sur un intervalle* $[a-x_0, a+x_0]$ *et*

$$u(x) \leq p(x) + \Big| \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\ dt \Big|, \quad \textit{pour tout} \ \ x \in [x_0 - a, x_0 + a]. \tag{1.1.4}$$

Alors, on a l'inégalité suivant

$$u(x) \leq p(x) + \Big| \int_{x_0}^{x} p(t)q(t) \exp\Big(\Big| \int_{t}^{x} q(s)\ ds \Big| \Big)\ dt \Big|, \quad \textit{pour tout} \ \ x \in [a-x_0, a+x_0]. \tag{1.1.5}$$

Démonstration. On va montrer la relation (1.1.5) pour $x \in [x_0, x_0+a]$, pour $x \in [x_0-a, x_0]$ la preuve est similaire. On définit :

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)\ dt,$$

donc $r(x_0) = 0$ et $r'(x) = q(x)u(x)$. D'après la relation (1.1.4) on peut écrire

$$u(x) \leq p(x) + r(x),$$

ce qui implique que :

$$r'(x) \leq p(x)q(x) + q(x)r(x).$$

En multipliant par $\exp\Big(- \int_{x_0}^{x} q(s)\ ds \Big)$, on obtient :

$$\Big(\exp\Big(- \int_{x_0}^{x} q(s)\ ds \Big) r(x) \Big)' \leq p(x)q(x) \Big(- \int_{x_0}^{x} q(s)\ ds \Big).$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$r(x) \leq \int_{x_0}^{x} p(t)q(t) \exp\Big(- \int_{t}^{x} q(s)\ ds \Big)\ dt.$$

Donc la relation (1.1.5) découle de $u(x) \leq p(x) + r(x)$.

□

Corollaire 1.1.1. *Si on prend* $p(x) = 0$ *dans le lemme 1.1.1, alors* $u(x) = 0$.

1.2 Méthode d'approximations successives de Picard

On résoudre l'équation intégrale (1.1.2) en utilisant la méthode des approximations successives de Picard. Pour cela, soit $y_0(x)$ une fonction continue (on choisit souvent

$y_0(x) = y0$) ce que on suppose être l'approximation initiale de la solution inconnue de (1.1.2), puis on définit $y_1(x)$ comme

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt.$$

On prend cette $y_1(x)$ comme notre prochaine approximation et la remplaçons par $y(x)$ sur le côté droit de (1.1.2) et l'appelons $y_2(x)$. En continuant ainsi, la $(m+1)$-ème approximation $y_{m+1}(x)$ est obtenue à partir de $y_m(x)$ au partir de la relation

$$y_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_m(t))\, dt, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.1. *Le problème $y' = -y$, $y(0) = 1$ équivaut à résoudre l'équation intégrale*

$$yx) = 1 - \int_0^x y(t)\, dt.$$

Soit $y_0(x) = 1$, alorss on obtient :

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \int_0^x dt = 1 - x \\ y_2(x) &= 1 - \int_0^x (1-t)dt = 1 - x + \frac{x^2}{2} \\ &\dots \\ y_m(x) &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

On remarque que $\lim_{m \to +\infty} = e^{-x}$ et la fonction $y(x) = e^{-x}$ est en effet la solution du problème donné dans $J = \mathbb{R}$.

Le résultat suivant fournit des conditions suffisantes pour la convergence uniforme de la suite $(y_m(x))$ vers l'unique solution $y(x)$ de l'équation intégrale (1.1.2), ou de manière équivalente du problème de la valeur initiale (1.1.1).

Théorème 1.2.1. *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$f(x, y)$ est continue sur le rectangle fermé $\overline{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a$ et $|y - y_0| \leq b\}$ et par conséquent, il existe $M > 0$ telle que $|f(x, y)| \leq M$ pour tout $(x, y) \in \overline{S}$.*
2. *$f(x, y)$ est uniformément Lipschitzienne sur $\overline{S}$.*
3. *$y_0(x)$ est continue sur $|x - x_0| \leq a$ et $|y_0(x) - y_0| \leq b$.*

Alors la suite $(y_m(x))$ générée par le schéma itératif de Picard (1.2.1) converge vers l'unique solution $y(x)$ du problème (1.1.1). Cette solution est valable dans l'intervalle $J_h = |x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. De plus, pour tout $x \in J_h$, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|y(x) - y_m(x)| \leq Ne^{Lh} \min\left\{1, \frac{(Lh)^m}{m!}\right\}, \quad m = 0, 1, ... \tag{1.2.2}$$

où $\max\limits_{x \in J_h} |y_1(x) - y_0(x)| \leq N$.

Démonstration. □

Remarque 1.2.1. *Le théorème 1.2.1 est appelé théorème d'existence locale car il ne garantit une solution qu'au voisinage du point (x_0, y_0).*

Exemple 1.2.2. *On considère le problème de la valeur initiale suivant :*

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0. \tag{1.2.3}$$

Facilement de voir que l'unique solution $y(x) = \tan x$ existe dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pour appliquer le théorème 1.2.1, on note que

- *La fonction $(x, y) \mapsto 1 + y^2$ est continue sue le rectangle $\overline{S} : |x| \leq a, |y| \leq b$ et $1 + y^2 \leq 1 + b^2 = M$*
- *La fonction $(x, y) \mapsto 1 + y^2$ est uniformément Lipschitzienne sur $\overline{S}$ avec $L = 2b$.*
- *$y_0(x) \equiv 0$ est continue sur $|x| \leq a$ et $|y_0(x)| \leq b$.*

Alors, il existe une solution unique de (1.2.3) dans l'intervalle $|x| \leq h = \min\{a, \frac{b}{1+b^2}\}$. Comme $\frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{2}$ (avec égalité pour $b = 1$), l'intervalle optimal que peut donner le théorème 1.2.1 est $|x| \leq \frac{1}{2}$.

De plus, le schéma itératif (1.2.1) pour le problème (1.2.3) prend la forme

$$y_{m+1}(x) = x + \int_{x_0}^{x} y_m^2(t)\, dt, \quad y_0(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Donc, on obtient $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3}$. Ainsi, l'erreur liée (1.2.2) avec $b = 1$, $h = \frac{1}{2}$ et $m = 2$ nous donne :

$$\left|\tan x - x - \frac{x^3}{3}\right| \leq \frac{1}{2} e \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4} e, \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Si la solution du problème de la valeur initiale (1.1.1) existe dans tout l'intervalle $|x - x_0| \leq a$, on dit que la solution existe globalement. Le résultat suivant est appelé un théorème d'existence globale.

Théorème 1.2.2. *Soit les conditions suivantes satisfaites :*

1. $f(x, y)$ *est continue dans la bande* $T : |x - x_0| \leq a, |y| \leq \infty$.
2. *La fonction* (x, y) *est uniformément Lipschitzienne sur* T.
3. $y_0(x)$ *est continue sur* $|x - x_0| \leq a$.

Alors la suite ym (x) engendrée par le schéma itératif de Picard (1.2.1) existe dans tout l'intervalle $|x - x_0| \leq a$, *et converge vers la solution unique* $y(x)$ *du problème de la valeur initiale (1.1.1).*

Démonstration. Pour toute fonction continue $y_0(x)$ sur $|x-x_0| \leq a$ un argument inductif facile établit l'existence de chaque $y_m(x)$ dans $|x - x_0| \leq a$ satisfaisant $|y_m(x)| < \infty$. De plus, comme dans la démonstration du théorème 1.2.1, il est facile de vérifier que la suite $y_m(x)$ converge vers $y(x)$ dans $|x - x_0| \leq a$ (en remplaçant h par a tout au long de la démonstration et en rappelant que la fonction $f(x, y)$ satisfait la condition de Lipschitz dans la bande T). □

Corollaire 1.2.1. *Soit* $f(x, y$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^2$ *et uniformément Lipschitzienne sur chaque bande* $|x| \leq a, |y| < \infty$ *avec la constante de Lipschitz* L_a. *Alors le problème de la valeur initiale (1.1.1) admet une solution unique qui existe pour tout* x.

Démonstration. Pour tout x, il existe $a > 0$ tel que $|x - x_0| \leq a$. Comme la bande T est contenue dans la bande $T_{a+|x_0|}$, la fonction $f(x, y)$ satisfait les conditions du théorème 1.2.2 dans la bande T. Par conséquent, le résultat suit pour tout x. □

1.3 Théorèmes d'existence

Dans cette section, on va prouver que la continuité de la fonction $f(x, y)$, seulement, est suffisante pour l'existence d'une solution du problème de la valeur initiale (1.1.1).

Théorème 1.3.1. *[Théorème d'existence de Peano] Soit* $f(x, y)$ *est une fonction continue et bornée sur la bande* $T : |x - x_0| \leq a, |y| \leq \infty$. *Alors le problème (1.1.1) admet au moins une solution dans l'intervalle* $|x - x_0| \leq a$.

Démonstration. □

Corollaire 1.3.1. *Soit $f(x,y)$ est une fonction continue sur le rectangle $\overline{S}$ et par suite il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(x,y| \leq M$ pour tout $(x,y) \in \overline{S}$. Alors le problème (1.1.1) admet au moins une solution dans J_h.*

Démonstration. La preuve est la même que celle du théorème 1.3.1 avec quelques changements évidents. □

Exemple 1.3.1. *Comme la fonction $f(x,y) = y^{2/3}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors d'après le corollaire 1.3.1, le problème $y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $|x| \leq h = \min\{a, b^{1/3}\}$. Si on prend b suffisament large alors $h = a$. Par conséquent, le problème donné admet au moins une solution pour tout x dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.3.1. *Le corollaire 1.3.1 énonce essentiellement ce qui suit : Si dans un domaine D la fonction $f(x,y)$ est continue, alors pour tout point (x_0,y_0) de D il y a un rectangle $\overline{S}$ tel que le problème (1.1.1) admet une solution $y(x)$ dans J_h. Puisque $\overline{S}$ se trouve dans D, en appliquant le corollaire 1.3.1 au point où la solution est en dehors de $\overline{S}$, on peut prolonger la région dans laquelle la solution existe.*

1.4 Théorèmes d'unicité

Afin d'établir l'unicité (c'est-à-dire l'existence d'au plus une solution), une condition supplémentaire sur $f(x,y)$ est requise. Dans ce qui suit, on fournire plusieurs de ces conditions qui sont suffisantes pour l'unicité des solutions de (1.1.1).

Théorème 1.4.1 (Théorème de l'unicité de Lipschitz)**.** *Soit $f(x,y)$ est continue et uniformément Lipschitzienne sur $\overline{S}$. Alors le problème (1.1.1) admet au plus une solution dans $|x - x_0| \leq a$.*

Démonstration. Dans le théorème 1.2.1, l'unicité de solution de (1.1.1) est prouvée dans l'intervalle J_h ; donc, il est clair que J_h peut être remplacé par l'intervalle $|x - x_0| \leq a$. □

Théorème 1.4.2. *[Théorème de l'unicité de Peano] Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $\overline{S}_+ : x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $|y - y_0| \leq b$ et décroissante par rapport à y pour tout x fixé dans $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Alors le problème (1.1.1) admet au plus une solution dans $[x_0, x_0 + a]$.*

Démonstration. Supposons que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions diffèrentes du problème (1.1.1) dans $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Supposons que $y_2(x) > y_1(x)$ for any $x_1 < x < x_1 + \varepsilon \leq x_0 + a$ et $y_1(x) = y_2(x)$ for $x_0 \leq x \leq x_1$; c.à.d. est la plus grande borne inférieure de l'ensemble A constitué de x pour lesquels $y_2(x) > y_1(x)$. Cette plus grande borne inférieure existe parce que l'ensemble A est borné inférieurement au moins par x_0. Alors, pour tout $]x_1, x_1 + \varepsilon[$, on a $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$; c.à.d. $y_1'(x) \geq y_2'(x)$. On déduit que la fonction $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ est décroissante. Puisque si $z(x_1) = 0$ on devrait avoir $z(x) \leq 0$ for any $x_1 < x < x_1 + \varepsilon$. Cette contradiction prouve que $y_1(x) = y_2(x)$ dans $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. □

Exemple 1.4.1. *Le problème $y' = |y|^{1/2} sgn(y), y(0) = 0$ admet deux solutions $y(x) = 0$ et $y(x) = \frac{x^2}{4}$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On remarque $f(x, y) = |y|^{1/2} sgn(y)$ est continue et croissante. Alors, dans le théorème 1.4.2, la condition "décroissante" ne peut pas être remplacé par "croissante".*

Théorème 1.4.3. *Théorème d'unicité de Krasnoselski-Krein Soit $f(x, y)$ une fonction sur $\overline{S}$ et pour tout $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{S}$, il satisfait :*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|x - x_0|^{-1}|y_1 - y_2|, x \neq x_0, k > 0. \tag{1.4.1}$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|^{\aleph}, C > 0, 0 < \aleph < 1, k(1 - \aleph). \tag{1.4.2}$$

Alors le problème (1.1.1) admet au plus une solution dans $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Exercice. On considère la fonction $f(x, y)$ définie sur la bande $[0, 1] \times]-\infty, +\infty[$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, x^{\frac{1}{1-\alpha}} < y < \infty, 0 < \alpha < 1, \\ kx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - k\frac{y}{x}, & 0 \leq x \leq 1, 1 < y < x^{\frac{1}{1-\alpha}}, k > 0, \\ kx^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, & 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < 0, k(1 - \alpha) < 1. \end{cases}$$

Montrer que le problème $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ admet une solution unique dans $[0, 1]$.

1.5 Exercices

Exercice 1. *Trouvez les domaines dans lesquels les fonctions suivantes satisfont à la condition de Lipschitz (uniformément Lipschitzienne), trouvez également les constantes de Lipschitz :*

$$(i)\ \frac{x}{1 + y^2}, \quad (ii)\ x^2 \cos^2 y + y \sin^2 x, \quad (iii)\ |xy|, \quad (iv)\ x^2y^2 + xy + 1.$$

Exercice 2. *Calculez les trois premières itérations avec l'approximation initiale* $y_0(x) \equiv 0$*, pour les problèmes de valeur initiale suivants :*

$$(i)\ \ y' = x^2 - y^2 - 1, y(0) = 0, \quad (ii)\ \ y' = \frac{x+2y}{2x+y}, y(1) = 1, \quad (iii)\ \ y' = x^2 + y^2, y(0) = 0.$$

Exercice 3. *Etudier l'existence et l'unicité des solutions des problèmes de valeur initiale suivants*

$$(i)\ \ y' = 1 + y^{2/3}, y(0) = 0, \quad (ii)\ \ y' = \sin(xy), y(0) = 1, (iii)\ \ y' = e^x + \frac{x}{y}, y(0) = 1.$$

Exercice 4. *Montrer que le théorème 8.1 garantit l'existence d'une solution unique du problème de valeur initiale* $y' = e^{2y}$*,* $y(0) = 0$ *dans l'intervalle* $(-1/2e, 1/2e)$*. Résoudre également ce problème et vérifiez que la solution existe dans un intervalle plus grand.*

Exercice 5. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction continue et* $|f(x, y)| \leq c_1 + c_2|y|^\alpha$ *pour tout* $(x, y) \in T$ *:* $|x - x_0| \leq a$*,* $|y| < \infty$ *où* c_1 *et* c_2 *sont des constantes positives et* $0 \leq \alpha < 1$*. Montrer que le problème de valeur initiale (1.1.1) admet au moins une solution dans l'intervalle* $|x - x_0| \leq a$*.*

Exercice 6. *Trouvez l'intervalle maximal d'existence des solutions de* $y' + \sin 3y^{\frac{4}{3}} \sin x = 0$ *satisfaisant*

$$(i)\ \ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0, \quad (ii)\ \ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{8}, \quad (iii) \quad (ii)\ \ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 8.$$

Exercice 7. *Soit* $f(x, y)$ *continue et satisfait la condition de Lipschitz généralisée*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(x)|y_1 - y_2|,$$

pour tout $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{S}$ *où la fonction* $L(x)$ *est telle que l'intégrale* $\int_{x_0+a}^{x_0-a} L(t)\ dt$ *existe. Montrer que (1.1.1) admet au plus une solution dans* $|x - x_0| \leq a$*.*

Exercice 8. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction continue dans* $\overline{S}_+$ *et pour tout* (x, y_1)*,* (x, y_2) *dans* $\overline{S}_+$ *avec* $y_2 \geq y_1$ *satisfont la condition de Lipschitz*

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leq L(y_2 - y_1).$$

Montrer que (1.1.1) admet au plus une solution dans $x_0 \leq x \leq x_0 + a$*.*

Exercice 9. *On considère la fonction $f(x,y)$ sur la bande $T : -\infty < x \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, -\infty < y < \infty; \\ 2x, & 0 < x \leq 1; -\infty < y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x}, & 0 < x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2; \\ -2x, & 0 < x \leq 1, x^2 < y < \infty. \end{cases}$$

Montrer que le problème $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $-\infty < x \leq 1$. De plus, montrer que le Picard itère avec $y_0(x) = 0$ pour ce problème ne converge pas.

1.6 Réponses ou indications

Exercice 1.

$$(i)\ \ |x| \leq a, |y| < \infty,\ \ L = \frac{3\sqrt{3}}{8}a, \quad (ii)\ \ |x| \leq a, |y| < \infty, L = a^2 + 1,$$

$$(iii)\ \ |x| \leq a, |y| \leq b, L = 2a^2b + a.$$

Exercice 2.

$$(i)\ \ -x, -x, -x, \quad (ii)\ \ x, x, x, \quad (iii)\ \ \frac{2}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{63}x^7,$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{8}{2079}x^{11} + \frac{16}{59535}x^{15}.$$

Exercice 3.

(ii) Solution unique globale, (iii) Solution unique locale.

Exercice 4.

La solution $y(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ existe pour tout $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Exercice 5.

Dans le rectangle $\overline{S} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$, on a $|f(x,y)| \leq c_1 + c_2(|y_0| + b)^\alpha = K$. Notons que $\frac{b}{K} \to +\infty$ quand $b \to +\infty$.

Exercice 6. (i) La solution est $y(x) \equiv 0$, qui définie sur $\mathbb{R}$, (ii) La solution est $y(x) = \frac{1}{(2-\cos x)^3}$, qui définie sur $\mathbb{R}$, (iii) La solution est $y(x) = \frac{1}{(\frac{1}{2}-\cos x)^3}$, qui définie sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$.

Exercice 7.

Appliquer le lemme de Gronwall.

Exercice 8. Supposer deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ telles que $y_2(x) > y_1(x)$, $x_1 < x < x_1 + \varepsilon = x_0 + a$ et $y_1(x) = y_2(x)$ pour $x_0 \leq x \leq x_1$. Maintenant, appliquer le lemme de Gronwall.

Exercice 9.

La fonction donnée est continue et bornée par 2 dans T. Elle satisfait également les conditions du théorème 1.4.2.

La solution unique est

$$y(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0; \\ \frac{1}{3}x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Les approximations successives sont $y_{2m-1}(x) = x^2$, $y_{2m}(x) = -x^2$, $m = 1, 2, ...$