1.5 Fonction de Green

Soit $p, q, f \in \mathcal{C}([a,b])$ où $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $(a < b)$ et $(\alpha_i,\beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall\, i = 1,2, |\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équations différentielles ordinaires:

$$\begin{aligned} (H) &\quad (py')' + py = 0 \\ (NH) &\quad (py')' + py = f \end{aligned}$$

ainsi que les conditions aux bords associées:

$$(CB)_h \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Définition 1.2 *On appelle fonction de Green associée au problème homogène $(H)-(CB)_h$ une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:*

(a) *G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$;*

(b) *G est symétrique: $G(x,y) = G(y,x), \forall\,(x,y) \in [a,b]^2$;*

(c) *$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout $x \neq y$;*

(d) *$\frac{\partial G}{\partial x}(y^+,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}$ pour tout $y \in [a,b]$;*

(e) *la fonction partielle $x \mapsto G(x,y)$ est solution de l'équation (H) pour tout $x \neq y$;*

(f) *la fonction partielle $x \mapsto G(x,y)$ vérifie les conditions $(CB)_h$ pour tout $y \in [a,b]$.*

Remarque 1.2 *Définissons la fonction de Dirac δ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ par $\delta_{|x=x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x)$ où*

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Alors

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} 0, & x_0 \notin (a,b), \\ 1, & x_0 \in (a,b). \end{cases}$$

Si φ est continue en x_0, on a également

$$\int_a^b \varphi(x)\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} 0, & x_0 \notin (a,b), \\ \varphi(x_0), & x_0 \in (a,b). \end{cases}$$

La fonction de Green associée à un opérateur de dérivation injectif L avec des conditions aux bords homogènes $(CB)_h$ est solution du problème:

$$\begin{cases} LG(x,y) = \delta(x-y), \\ x \mapsto G(x,.) \text{ vérifie les conditions aux bords } (CB)_h. \end{cases}$$

Théorème 1.4 *(***Existence et unicité de la fonction de Green***) Supposons que le problème homogène $(H)-(CB)_h$ n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction G ne dépendant pas de f, et dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction f, la solution y du problème non homogène $(NH)-(CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme:*

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds.$$

Démonstration

(i) Existence de la fonction G: Soit ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes à conditions initiales

$$(H) + \begin{cases} \phi_1(a) = \alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad (H) + \begin{cases} \phi_2(b) = \beta_2 \\ \phi_2'(b) = \beta_1. \end{cases}$$

Alors, $\phi_1, \varphi_2 \not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon ϕ_1 (et aussi ϕ_2) serait solution du problème $(P_0) : (H) + (CB)_h$ contredisant l'hypothèse. Soit donc $W \neq 0$ leur Wronskien et G la fonction de Green définie par

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\phi_1(x)\phi_2(y)}{p(x)W(x)}, & a \leq x \leq y, \\ \frac{\phi_1(y)\phi_2(x)}{p(y)W(y)}, & y \leq x \leq b. \end{cases}$$

Remarquons que le produit pW est constant car $p(x)W(x) = p(y)W(y) = p(a)W(a) = p(b)W(b) \neq 0$, $\forall\, x,y \in [a,b]$. En effet, d'après la formule de Lagrange, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_2(p\varphi_1')' - \varphi_1(p\varphi_1')' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (p\varphi_2\varphi_2')' - (p\varphi_1\varphi_2')' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [p(\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2')]' = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad pW = cte.
\end{aligned}$$

Enfin, G vérifie bien les hypothèses de la fonction de Green.

(ii) Unicité de la fonction G Soit G, H deux fonctions de Green; alors $\int_a^b [G(x,y) - H(x,y)]f(y)dy = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$ et $\forall\, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction continue. Pour x fixé, posons $f(y) = G(x,y) - H(x,y)$; on a $\int_a^b [G(x,y) - H(x,y)]^2 dy = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Comme G et H sont continues, $G \equiv H$, c'est-à-dire $(G(x,.) = H(x,.), \forall\, x \in [a,b])$.

(iii) Existence et unicité d'une solution: La fonction F définie par,

$$F(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy = \frac{\phi_2(x)}{pW}\int_a^x \phi_1(y)f(y)dy + \frac{\phi_1(x)}{pW}\int_x^b \phi_2(y)f(y)dy$$

est solution du problème $(NH) + (CB)_h$. En effet,

$$\begin{aligned}
&F'(x) = \textstyle\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)f(y)\,dy \\
\text{et} \quad &F''(x) = \textstyle\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)f(y)\,dy + f(x)[\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)].
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) & = & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) \\
\dfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) & = & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x,x^+) \\
\dfrac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) & - & \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \dfrac{1}{p}.
\end{array}$$

On en déduit l'expression:

$$F''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)f(y)\,dy + \frac{f(x)}{p(x)}$$

ainsi que:

$$(pF')' = \int_a^b \left(p\frac{\partial G}{\partial x}\right)'(x,y)f(y)\,dy + f(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(pF')' + qF &= \int_a^b \left[\left(p\frac{\partial G}{\partial x} \right)' + qG \right] f(y)\,dy + f(x) \\
\text{(par définition de } G) &= -\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_0(y) f(y)\,dy + f(x) \\
\text{(par définition de } \varphi_0) &= f(x).
\end{aligned}$$

L'unicité de la solution y résulte de l'hypothèse sur le problème homogène ainsi que de l'Alternative de Fredholm.

1.5.1 Exemples

Exemple 1.4 *La fonction de Green du problème*

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

s'écrit

$$G(x,y) = \begin{cases} \cos y \sin x, & si\ x \leq y; \\ \cos x \sin y, & si\ x \geq y. \end{cases}$$

Exemple 1.5 *Considérons le problème à deux points posé sur un intervalle* $[a,b]$.

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad a < x < b \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Construisons les fonctions φ_1 *et* φ_2 *solution des problèmes de Cauchy:*

$$\begin{cases} \varphi_1'' = 0 \\ \varphi_1(a) = 0 \\ \varphi_1'(a) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2'' = 0 \\ \varphi_2(b) = 0 \\ \varphi_2'(b) = -1. \end{cases}$$

Alors, $\varphi_1(x) = (a - x)$, $\varphi_2(x) = (b - x)$ *et* $W(\varphi_1,\varphi_2) = b - a$.
D'où la fonction de Green:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{(b-a)}, & si\ x \leq y; \\ \frac{(y-a)(x-b)}{(b-a)}, & si\ x \geq y. \end{cases}$$

La solution unique du problème (1.4) est donc donnée par

$$y(x) = \int_a^b G(x,y) f(y) dy = \frac{x-b}{b-a} \int_a^x (y-a) f(y)\,dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (y-b) f(y)\,dy.$$

1.5.2 Conditions aux bords non homogènes

Théorème 1.5 *Supposons que le problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale et soit* G *la fonction de Green correspondante* (1.4).
On désigne par ψ_1 *et* ψ_2 *les uniques solutions des problèmes:*

$$\begin{cases} (H) \\ \alpha_1\psi_1(a)+\alpha_2\psi_1'(a)=\gamma \\ \beta_1\psi_1(b)+\beta_2\psi_1'(b)=0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} (H) \\ \alpha_2\psi_1(a)+\alpha_2\psi_2'(a)=0 \\ \beta_2\psi_1(b)+\beta_2\psi_2'(b)=\delta \end{cases}$$

Alors le problème $(NH)-(CB)_{nh}$ *admet une unique solution définie par la formule:*

$$y(x)=\int_a^b G(x,y)f(y)\,dy+\psi_1(x)+\psi_2(x).$$

Démonstration
L'unicité de y résulte de l'alternative de Fredholm; la définition des fonction ψ_1 et ψ_2 et le théorème 1.4 montrent que y est solution du problème $(NH)-(CB)_{nh}$.

Exemple 1.6 *La solution du problème*

$$\begin{cases} y''=f(x), \quad a<x<b \\ y(a)=\gamma, \quad y(b)=\delta \end{cases}$$

s'écrit sous la forme:

$$y(x)=\frac{x-b}{b-a}\int_a^x(y-a)f(y)dy+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b(y-b)f(y)dy+\delta\frac{x-a}{b-a}+\gamma\frac{x-b}{b-a},$$

formule qu'on a déjà obtenue directement sur l'intervalle (0,1) *(voir exemple 1.1).*

1.5.3 Existence d'une fonction de Green généralisée

Théorème 1.6 *Supposons que le problème* $(H)-(CB)_h$ *admet une solution non triviale* φ_0. *Alors, le problème* $(NH)-(CB)_h$ *admet une solution si et seulement si* $\int_a^b f(x)\varphi_0(x)\,dx=0$ $(\langle f,\varphi_0\rangle_{L^2(a,b),L^2(a,b)}=0)$. *Dans ce cas, il existe une infinité de solutions de la forme*

$$y(x)=\int_a^b G(x,y)f(y)\,dy+k\varphi_0,$$

où $k\in\mathbb{R}$ *et* G *est une fonction de Green généralisée (il en existe une seule vérifiant* $\int_a^b y(x)\varphi_0(x)\,dx=0$*).*

Remarque 1.3 *Ce résultat complète celui donné par l'alternative de Fredholm (Théorème 1.3. En cas de non unicité, il précise l'existence lorsque une condition d'orthogonalité est satisfaite.*

Démonstration du théorème 1.6

• La condition d'orthogonalité est évidemment nécessaire; en effet

$$\int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx = \int_a^b \varphi_0[(py')' + qy]\,dx = \int_a^b y[(p\varphi_0')' + q\varphi_0]\,dx = 0.$$

En effet, de la condition homogène $(CB)_h$ résulte l'égalité: $[pW(y,\varphi_0)]_a^b = 0$.

• La condition est suffisante:

On construit une fonction $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ telle que l'application $x \mapsto G(x,y)$ soit solution de l'équation non homogène $(pz')' + qz = -\varphi_0(x)\varphi_0(y)$ pour y fixé dans $[a,b]$ et telle que G vérifie les propriétés usuelles d'une fonction de Green. Dans la pratique, une construction d'une telle fonction G peut être faite de la manière suivante:

On considère φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène puis une fonction φ_3 solution de l'équation $(pz')' + qz = -\varphi_0(x)\varphi_0(y)$; alors il suffit de prendre:

$$G(x,y) = \begin{cases} a_1(y)\varphi_1(x) + a_2(y)\varphi_2(x) + \varphi_3(x), & \text{si } x \le y; \\ b_1(y)\varphi_1(x) + b_2(y)\varphi_2(x) + \varphi_3(x), & \text{si } x \ge y. \end{cases}$$

où a_i et b_i $(i = 1,2)$ sont des fonctions à déterminer de façon à satisfaire les propriétés d'une fonction de Green.

Propriétés de la fonction de Green généralisée

1. $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ est continue, symétrique;
2. $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout couple (x,y) tel que $x \neq y$;
3. $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}$ pour tout $y \in [a,b]$;
4. L'application $x \mapsto G(x,y)$ vérifie l'équation $(pz')' + qz = -\varphi_0(x)\varphi_0(y)$ pour $x \neq y$ et les conditions $(CB)_h$;
5. $\int_a^b G(x,y)\varphi_0(y)\,dy = 0$.

Exemple 1.7 *Le problème*

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) - y'(1) = 0 \end{cases}$$

admet une solution si et seulement si $\int_0^1 f(x)x\,dx = 0$.

Dans ce cas, la construction de la fonction G se fait comme suit:

$$G(x,y) = \begin{cases} xa_1(y) + a_2(y) + \varphi_3(x), & \text{si } \ 0 \le x \le y; \\ xb_1(y) + b_2(y) + \varphi_3(x), & \text{si } \ y \le x \le 1. \end{cases}$$

En effet, $\{1,x\}$ est un système de solutions linéairement indépendantes de l'équation (H). Pour $\varphi_0(x) = x\sqrt{3}$, φ_3 est solution de l'équation $\varphi_3'' = -3xy$; d'où $\varphi_3(x) = -\frac{x^3y}{2}$. Déterminons à présent les fonctions a_i et b_i $(i = 1,2)$. Comme G continue en $x = y$, alors $xa_1(x) + a_2(x) = xb_1(x) + b_2(x)$ et l'on a $G(0,y) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$, $G(1,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(1,y) = 0 \Leftrightarrow b_2(y) = -y$. On en déduit que $a_1(y) = b_1(y) - 1$, $a_2 = 0$, $b_2(y) = -y$. Enfin, écrivons $\int_0^1 G(x,y)\varphi_0(x)dx = 0$; on aboutit à:

$$b_1(y) = -\frac{y^3}{2} + \frac{9y}{5} \quad \text{et donc} \ \ a_1(y) = -\frac{y^3}{2} + \frac{9y}{5} - 1$$

soit

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{x^3y}{2} - \frac{y^3x}{2} + \frac{9xy}{5} - x, & 0 \le x \le y; \\ -\frac{y^3x}{2} - \frac{x^3y}{2} + \frac{9xy}{5} - y, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

et donc

$$y(x) = \int_0^1 \left(\frac{9xy}{5} - \frac{x^3y + y^3x}{2}\right) f(y)dy - \int_0^x yf(y)dy - x\int_x^1 f(y)dy + kx \ (k \in \mathbb{R}).$$

1.6 Exercices résolus

Exercice 1

Déterminer valeurs propres et fonctions propres du problème aux limites linéaire:

$$\begin{cases} y'' + y' = \lambda y, \ a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

Corrigé

On trouve pour valeurs propres et fonctions propres:

$$\begin{cases} \lambda_n = -\frac{1}{4} - \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \ n \in \mathbb{N}^* \\ y_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)). \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres des problèmes aux limites linéaires suivants ainsi que les fonctions propres associées:

$$(1) \ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < b \\ y'(0) = y'(b) + \alpha y(b) = 0 \end{cases}$$

(Discuter en fonction du réel α).

$$(2) \ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad -b < x < b \\ y(-b) - y(b) = y'(-b) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

(conditions aux limites périodiques.)

Corrigé

(1) On aboutit à la discussion suivante:

• $\alpha = 0 : \ \lambda = 0$ et $\varphi = c \in \mathbb{R}^*$

• $\alpha > 0 : \ \lambda_n = (\frac{a_n + n\pi}{b})^2$ et $\varphi_n = \cos(x\sqrt{\lambda_n})$, $n = 0,1,\cdots$

• $\alpha < 0 :$

$$\lambda_n = \begin{cases} -(\frac{b_0}{b})^2, & n = 0 \\ (\frac{n\pi - b_n}{b})^2, & n = 1,2,\cdots \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \cosh\left(\frac{b_0}{b}x\right), & n = 0 \\ \cos\left(x\frac{n\pi - b_n}{b}\right), & n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

où la suite $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ est telle que $r_n = a_n + n\pi$ sont racines de l'équation $x \tan x = \alpha b$ alors que $r_n = n\pi - b_n$, $n = 1,2,\cdots$ et $b_0 > 0$ sont racines de l'équation $\tanh x = -\frac{\alpha b}{x}$.

(2) On trouve

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, & n = 1,2,\cdots \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ k_n \cos(\frac{n\pi}{b}x) + k'_n \sin(\frac{n\pi}{b}x), & n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

Exercice 3 (Théorème de comparaison pour les E.D.O du premier ordre)

Soit $I = [a,b]$ et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne par rapport à la seconde variable ou vérifiant seulement une condition de Lipschitz unilatérale:

$$\exists\, k > 0,\ f(x,y) - f(x,z) \leq k|y - z|,\ \forall\,(y,z) \in J^2.$$

Soit y et z deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant respectivement:

$$\begin{cases} y' \leq f(x,y), & x_0 < x < b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(x,z), & x_0 < x < b \\ z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

Montrer que si $y_0 < z_0$, alors $y(x) < z(x)$, $\forall\, x \in [x_0,b]$.

N.B. On peut même montrer l'implication des inégalités larges

$$(y_0 \leq z_0) \Rightarrow (y(x) < z(x) \text{ ou } y \equiv z,\ \forall\, x \in [x_0,b]).$$

Corrigé

La fonction $w = y - z$ vérifie l'inéquation différentielle $w'(x) \leq f(x,y) - f(x,z)$ ainsi que la condition initiale $w(x_0) < 0$; par continuité, il existe donc $\delta > 0$ tel que $w(x) < 0$, $\forall\, x \in [x_0, x_0 + \delta]$. Soit $\bar{x} = \max\{t,\ x_0 \leq t \leq b;\ w(t) < 0\}$. On a d'après la condition de Lipschitz (ou Lipschitz unilatérale) sur f, l'estimation $w'(x) \leq k|y(x) - z(x)| = -kw(x)$; $\forall\, x \in (x_0,\bar{x})$ d'où $(w(x)e^{kx})' \leq 0$ sur $(x_0,\bar{x})$ et donc $w(x)e^{kx} \geq w(\bar{x})e^{k\bar{x}} = 0$; la fonction w n'étant pas identiquement nulle sur $(x_0, \bar{x})$, on aboutit à une contradiction. Remarquons que $w(\bar{x}) = 0$ est obtenue par continuité.

Exercice 4 (Théorème d'oscillation de Sturm)

Soit φ_1 et φ_1 deux solutions respectives sur un intervalle (a,b) des équations différentielles du second ordre suivantes:

$$(\mathcal{E}_1) : (p_1 y')' + q_1 y = 0; \qquad (\mathcal{E}_2) : (p_2 y')' + q_2 y = 0$$

où $p_i \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et $q_i \in \mathcal{C}([a,b])$ $\quad (i = 1,2)$ sont telles que $p_1(x) > p_2(x)$ et $q_1(x) < q_2(x)$, $\forall\, x \in (a,b)$.

Montrer qu'entre deux zéros consécutifs x_1 et x_2 de φ_1, la solution φ_2 s'annule.

Corrigé

Soit x_1 et x_2 deux zéros consécutifs de φ_1 et supposons, par l'absurde, que φ_2 ne s'annule pas entre x_1 et x_2. Multiplions l'équation $(\mathcal{E}_1)$ par φ_1, la seconde par $(\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2})$, soustrayons membre à membre puis intégrons par parties sur (x_1,x_2); on obtient l'identité suivante, dite formule de Picone:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{x_1}^{x_2} [(p_1 - p_2)\varphi'^2_1 + (q_2 - q_1)\varphi_1^2]\, dx + \int_{x_1}^{x_2} p_2 \left(\frac{\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2}\right)^2 dx \\ = \tfrac{\varphi_1}{\varphi_2}[p_1\varphi_2\varphi_1' - p_2\varphi_2'\varphi_1]_{x_1}^{x_2} = 0,\end{aligned}$$

ce qui est contredit le fait que $p_1 - p_2$, $q_2 - q_1 > 0$.

Exercice 5 (Théorème de comparaison des valeurs propres

Considérons les problèmes de Sturm-Liouville linéaires:

$$\begin{cases} (p_1 y_1')' + (q_1 + \lambda) y_1 = 0, \quad a < x < b \\ \alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) = 0 \\ \gamma y_1(b) + \delta y_1'(b) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} (p_2 y_2')' + (q_2 + \mu) y_2 = 0, \quad a < x < b \\ \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) = 0 \\ \gamma y_2(b) + \delta y_2'(b) = 0 \end{cases}$$

et notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des valeurs propres respectives de ces problèmes. On suppose que les fonctions p_i et q_i sont continues, $p_i > 0$ pour $i = 1,2$ et que $p_1 > p_2$ et $q_1 < q_2$ sur (a,b). Montrer que $\lambda_n > \mu_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

Par la transformation de Prüffer

$$\begin{cases} y = r \sin\theta, \\ z = py' = r\cos\theta, \end{cases}$$

on obtient, pour les nouvelles inconnues θ_1 et θ_2, les équations:

$$\begin{cases} \theta_1' = \frac{1}{p_1}\cos^2\theta_1 + (q_1+\lambda)\sin^2\theta_1 \\ \theta_2' = \frac{1}{p_2}\cos^2\theta_2 + (q_2+\mu)\sin^2\theta_2 \end{cases}$$

ainsi que les conditions initiales suivantes (voir démonstration du théorème 1.2):

$$\begin{cases} \theta_1(a) = \theta_2(a) = \theta_a = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha p(a)}\right) \\ \theta_1(b,\lambda) = \theta_2(b,\mu) = \theta_b + (n-1)\pi \quad \text{où } \theta_b = \arctan\left(-\frac{\delta}{\gamma p(b)}\right) \\ (0 \leq \theta_a < \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 < \theta_b \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que $\mu > \lambda$, alors

$$\theta_2' = \frac{1}{p_2}\cos^2\theta_2 + (q_2+\mu)\sin^2\theta_2 > \frac{1}{p_1}\cos^2\theta_2 + (q_2+\lambda)\sin^2\theta_2.$$

Comme la fonction $f(x,y) = \frac{1}{p(x)}\cos^2 y + (q(x)+\lambda)\sin^2 y$ est Lipschitzienne par rapport à y, le théorème de comparaison sur les E.D.O. de premier ordre (exercice 3) fournit l'estimation $\theta_1(x,\lambda) < \theta_2(x,\lambda)$ sur $]a,b]$ et donc $\theta_1(b,\lambda) < \theta_2(b,\lambda)$ puis $\theta_1(b,\mu) < \theta_2(b,\lambda)$. Comme l'application $\lambda \mapsto \theta_2(b,\lambda)$ est strictement croissante (voir la démonstration du théorème 1.2), on en déduit que $\mu < \lambda$; d'où la contradiction avec l'hypothèse.

Exercice 6

On considére le problème de Sturm-Liouville linéaire:

$$(SL) \quad \begin{cases} (E_h) \quad (py_1')' + (q+\lambda r)y &= 0, \quad a<x<b \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) &= 0 \end{cases}$$

et notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres. On suppose que les fonctions p et r sont continues, strictement positives sur (a,b).

(1) Montrer que l'on peut également choisir la fonction q positive.

(2) Supposons $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$ et posons $M_q := \sup\limits_{x\in(a,b)} q(x)$ et $M_r := \sup\limits_{x\in(a,b)} r(x)$. Montrer que $\lambda_1 \geq -\frac{M_q}{M_r}$.

Corrigé

(1) L'équation (E_h) est invariante par les changements $q \to \tilde{q} = q + kr$ et $\lambda \to \tilde{\lambda} = \lambda - k$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$. Alors $\tilde{q} > 0$ si $k > -\frac{q}{r}$ ce qui est possible car la fonction $-\frac{q}{r}$ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, donc majorée.
(2) Multiplions par y l'équation (E_h) puis intégrons par parties sur (a,b); on obtient l'identité

$$-\int_a^b p|y'|^2\,dx + [pyy']_a^b + \int_a^b (q+\lambda r)y^2\,dx = 0.$$

Comme $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$, alors $[pyy']_a^b = 0$; par suite

$$\lambda \int_a^b ry^2\,dx = \int_a^p |y'|^2\,dx - \int_a^b qy^2\,dx.$$

D'où la minoration suivante

$$\lambda M_r \int_a^b y^2\,dx \geq \lambda \int_a^r |y|^2\,dx > -\int_a^b qy^2\,dx \geq -M_q \int_a^b y^2\,dx.$$

Par conséquent, $\lambda \geq -\frac{M_q}{M_r}$ car $y \not\equiv 0$.

1.7 Exercices non résolus

Exercices 1

Montrer que, pour le problème de Sturm-Liouville $(\mathcal{SLH})$, toute valeur propre est liée à sa fonction propre par la relation

$$\lambda = \frac{-p\varphi\varphi'|_a^b + \int_a^b [p(\varphi')^2 - q\varphi^2]\,dx}{\langle\varphi,\varphi\rangle}.$$

Exercices 2

Montrer que la fonction de Green G pour le problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' & = & 0, \quad a < x < b, \\ \alpha y(a) - \beta y'(a) & = & 0, \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) & = & 0, \end{array}\right.$$

existe si $\alpha\gamma(b-a)+\alpha\delta+\gamma\beta \neq 0$ auquel cas elle s'écrit

$$G(t,s) = \begin{cases} (\gamma t - \gamma b - \delta)(\alpha s - \alpha a + \beta) & s \leq t \\ (\gamma b - \gamma s + \delta)(\alpha a - \alpha t - beta) & t \leq s. \end{cases}$$

En déduire que la fonction G est négative si les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont positives.

Exercices 3

Déterminer une fonction de Green généralisée au problème

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 2y &= 0, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) - y'(1) &= 0, \\ y(2) - 2y'(2) &= 0. \end{cases}$$

Exercices 4

Discuter, en fonction des paramètres réels k et λ, l'existence de solutions au problème linéaire

$$\begin{cases} x^2y'' - 2y &= x^2 + \lambda x, \quad \pi < x < 2\pi, \\ y(\pi) + \pi y'(\pi) &= 0, \\ y(2\pi) + ky'(2\pi) &= 0. \end{cases}$$