CHAPITRE 3

ETUDE D'UN PROBLÈME NON LINÉAIRE (P) :

3.1 Fonction de Green pour l'opérateur y'' :

Dans ce chapitre, on s'interesse à étudier l'existence des solutions pour un problème aux limites non linéaire posé sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$:

$$(P)\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x));, & \text{si } a < x < b; \\ (CB), & . \end{cases}$$

où $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et où (CB) désigne des conditions aux bords linéaires et séparées du type Dirichlet ou Neumann.

Comme déjà vu au chapitre 1, La nature et le nombre de solutions du problème (P) dépend de la longueur de l'intervalle d'étude, de la constante de Lipschitz de la fonction f, de la fonction f elle même et enfin des conditions aux limites.

Dans ce qui suit, nous allons présenter, pour le problème non linéaire, quelques résultats d'existence classiques lorsque :

1. f est lipschitzienne bornée.
2. f est lipschitzienne avec restrictions sur les constantes de Lipschitz.
3. f est continue bornée.

la fonction de Green pour l'opérateur y'' avec des conditions aux bords homogènes de type Dirichlet s'écrit :

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq y; \\ \frac{(y-a)(x-b)}{b-a}, & \text{si } y \leq x \leq b. \end{cases}$$

On sait aussi que y est solution du problème

$$\begin{cases} y'' = f(x), \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

si et seulement si :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds.$$

Donc, les solutions du problème de Dirichlet non linéaire

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

sont s'écerient sous la forme :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s))\, ds.$$

Pour plus des détails voir les exercices 13 et 14.

3.2 Le cas d'un second membre lipschitzien borné

Définition 3.2.1 (Fonction lipschitzien)**.**

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit f une fonction régulière et soit y une solution du problème (3.1.1). Alors, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \max_{a \le x \le b} |y(x)| &\le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \le x \le b} |f(x)| \\ \max_{a \le x \le b} |y'(x)| &\le \frac{(b-a)^2}{2} \max_{a \le x \le b} |f(x)|. \end{aligned}$$

Démonstration. Voir l'exercice 10. □

Théorème 3.2.1. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables et bornée. Alors pour tous réels γ, δ, le problème*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), & \text{si } a < x < b \\ y(a) = \gamma, y(b) = \delta. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$.

Exemple 3.2.1. *Le problème suivant :*

$$\begin{cases} y'' + \sin y = f(x), & \text{si } a < x < b \\ y(a) = \gamma, y(b) = \delta. \end{cases}$$

admet au moins une solution pour toute fonction continue f et pour tout $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

3.3 Le cas d'un second membre lipschitzien

3.3.1 Un résultat général

Remarque 3.3.1. *il suffit d'étudier le problème (3.2.1) pour des conditions aux bords homogènes $\gamma = \delta = 0$.*

En effet, on considère la fonction $h(x) = \frac{b\gamma - a\delta + (\delta - \gamma)x}{b-a}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} h''(x) = 0, \\ h(a) = \gamma, h(b) = \delta. \end{cases}$$

si on suppose que y est solution du problème :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & \text{si } a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

alors la fonction $\widetilde{y} = y + h$ est une solution du problème :

$$\begin{cases} \widetilde{y}'' = \widetilde{f}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}'), & \text{si } a < x < b \\ \widetilde{y}(a) = \gamma, \widetilde{y}(b) = \delta. \end{cases}$$

où $\widetilde{f}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = f(x, \widetilde{y} - h, \widetilde{y}' - h)$ est une fonction possèdant les mêmes constantes de Lipschitz que la fonction f elle-même.

Théorème 3.3.1 (Théorème du point fixe des applications contractantes)**.** .
Soit E un espace métrique complet et f une application contractante de E dans E, alors il existe dans E un unique point fixe E.

Voici le résultat fondamental de cette partie :

Théorème 3.3.2. *Supposons que f est continue, lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, c'est-à-dire qu'il existe $K, L > 0$ tel que*

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|, \quad \forall (x, y_1, z_1), (x, y_2, z_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$$

Alors si : Si

$$K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{(b-a)}{2} < 1 \tag{3.3.1}$$

le problème (3.2.1) admet une unique solution $y \in C^2([a, b])$.

Démonstration. On considère l'espace $E = C^1([a, b])$ muni de la norme

$$\|u\|_E = \max_{a \leq x \leq b}(|u(x)| + |u'(x)|);$$

donc, E est un espace de Banach pour cette norme. On défnit l'application :

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow E \\ y &= Ty = Y \end{aligned}$$

où :

$$Y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, y(s), y'(s))\, ds$$

et G est la fonction de Green associée au problème (3.2.1) avec $\gamma = \delta = 0$. On vérifie que T est bien définie et contractante.

T **est bien définie :** car la fonction G est unique en vertu de l' Alternative de Fredholm (voir chapitre 1)

T **est contractante :** Soit $(y, z) \in X$ et soit $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |Ty(x) - Tz(x)| &= |\int_a^b G(x, s)\big(f(s, y(s), y'(s)) - f(s, z(s), z'(s))\big)\, ds| \\ &= \max_{s \in [a,b]} K|y(s) - z(s)| + L|y'(s) - z'(s)| \int_a^b |G(x, s)|\, ds. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(Ty)'(x) - (Tz)'(x)| &= |\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, s)\big(f(s, y(s), y'(s)) - f(s, z(s), z'(s))\big)\, ds| \\ &= \max_{s \in [a,b]} K|y(s) - z(s)| + L|y'(s) - z'(s)| \int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)|\, ds. \end{aligned}$$

On sait que pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(x,s)|\, ds &\leq \frac{(b-a)^2}{8} \\ \int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds &\leq \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\|Ty - Tz\|_E \leq \Big(K\frac{(b-a)^2}{8} + L\frac{b-a}{2}\Big)\|y-z\|_E.$$

D'après l'hypothèse (3.3.1), T est contractante. En vertu du théorème du point fixe de Banach, T admet un point fixe unique y, solution du problème (3.2.1).

$\square$

Exemple 3.3.1. 1. *Pour le problème*

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

la condition (3.3.1) est satisfaite avec $f(x,y,y') = -y$.

2. *Pour le problème*

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

la condition (3.3.1) n'est pas satisfaite avec $f(x,y,y') = -\pi^2 y$.

3.3.2 Un cas particulier : le cas où f ne dépend pas de la dérivée

Théorème 3.3.3. *Soit* $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* K*-lipschitzienne par rapport à* y. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y), & a < x < b \\ y(a) = \gamma, y(b) = \delta. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Si

$$\frac{K(b-a)^2}{\pi^2} < 1$$

Alors, pour tout $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *le problème admet une unique solution* $y \in C^2([a,b])$.

Démonstration. Soit $X = C([a, b])$ l'espace de Banach des fonctions continues muni de la norme à poids suivante :

$$\|u\|_E = \sup_{a<x<b} \frac{|u(x)|}{w(x)},$$

où w est fonction poids continue, strictement positive à choisir convenablement; $\|\cdot\|_E$ est une norme équivalente à la norme du $\sup$. On considère l'application

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ y &= Ty = Y \end{aligned}$$

où :

$$Y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s, y(s)) \, ds$$

et G est la fonction de Green associée au problème (3.2.1) avec $\gamma = \delta = 0$. Afin d'appliquer le théorème du point fixe de Banach, vérifions que T est une contraction.

Estimations à priori : Sachant que :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_E = \sup_{a\leq x\leq b} \frac{|Ty_1(x) - Ty_2(x)|}{w(x)}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{|Ty_1(x) - Ty_2(x)|}{w(x)} &= \frac{1}{w(x)} \Big| \int_a^b G(x, s)[f(s, y_1(s) - f(s, y_2(s))] \, ds \Big| \\ &\leq \frac{K}{w(x)} \int_a^b w(s)|G(x, s)| \Big| \frac{y_1(s) - y_2(s)}{w(s)} \Big| \, ds \\ &\leq \frac{K}{w(x)} \|y_1 - y_2\|_E \int_a^b w(s)|G(x, s)| \, ds, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_E \leq \|y_1 - y_2\|_E \sup_{a\leq x\leq b} \frac{K}{w(x)} \int_a^b w(s)|G(x, s)| \, ds.$$

Choix de la fonction poids w : On a, par hypothèse $b - a < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, on peut donc choisir $a_0 < a < b < b_0$ tel que $b_0 - a_0 < \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Le problème

$$\begin{cases} w'' + \lambda w = 0, & \text{si } a_0 < x < b_0\,; \\ w > 0, & \text{sur }]a_0, b_0[\,; \\ w(a_0) = w(b_0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

admet une solution positive si et seulement si $\lambda = \lambda_1 = \frac{\pi^2}{(b_0-a_0)^2}$. Soit w une telle solution associée à cette valeur propre λ. Par définition de a_0 et b_0, $K < \frac{\pi^2}{(b_0-a_0)^2}$, alors $\lambda > K$ et l'on a, sachant que la fonction de Green est de signe négatif

$$\begin{aligned} w(x) &= -\lambda \int_{a_0}^{b_0} w(s)G(x,s)\,ds \\ &> -\lambda \int_a^b w(s)G(x,s)\,ds \\ &> -K \int_a^b w(s)G(x,s)\,ds \\ &= K \int_a^b w(s)|G(x,s)|\,ds \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{K}{w(x)} \int_a^b w(s)|G(x,s)|\,ds < 1, \quad \forall x \in [a,b].$$

L'application T est donc une contraction, donc elle admet un unique point fixe, ce qui achève la démonstration du théorème 3.3.3. □

3.4 Le cas d'un second membre continue borné

Rappelons le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.4.1. *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

Théorème 3.4.2. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue et bornée :*

$$\exists M > 0, |f(x,y,z)| \leq M, \forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$$

Alors le problème :

$$\begin{cases} y''(x) = f(x,y,y'), & a < x < b \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$. De plus,

$$\forall x \in [a,b] : |y(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} \quad et \quad |y'(x)| \leq \frac{M(b-a)}{2}.$$

Démonstration. Soit $E = C^1([a,b])$ muni de la norme suivante :

$$\|u\|_E = \max\{\sup_{x\in[a,b]} |u(x)|, \frac{b-a}{4} \sup_{x\in[a,b]} |u'(x)|\}$$

C'est une norme équivalente à la norme du sup ; X est donc un espace de Banach pour cette norme aussi. On définit, comme dans le théorème précédent, l'application :

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow E \\ y &= Ty = Y \end{aligned}$$

où :

$$Y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s))\, ds$$

où G est la fonction de Green associée au problème (3.4.1).

— T est bien définie car la fonction G est définie de manière unique.

— On considère, dans E, la boule fermée de rayon $R = M\frac{(b-a)^2}{8}$:

$$B = \{u \in E : \|u\|_E \leq M\frac{(b-a)^2}{8}\}$$

Montrons que

— T **envoie** B **dans** B : Soit $y \in B$ et $Y = Ty$. Comme f est bornée par M, on a les estimations (Voir l'exercice 10).

$$\begin{aligned} |Y(x)| &\leq M\frac{(b-a)^2}{8} \\ |Y'(x)| &\leq M\frac{(b-a)}{2} \end{aligned}$$

et par suite

$$\|Y\|_E = M\frac{(b-a)^2}{8}.$$

d'où $Y \in B$ et donc T envoie B dans B (en fait T envoie tout l'espace X dans B).

— T **est continue** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergente vers une limite $y \in X$ et $Y_n = Ty_n$; alors (Y_n) converge vers Y, grâce à la continuité de f et au théorème de la convergence dominée de Lebesgue ; d'où le résultat.

— T **est compacte** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $Y_n'' = f(x, y_n, y_n')$ et f est continue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'où la compacité de l'application T. D'après le théorème du point fixe de Schauder, T admet un point fixe y, solution du problème (3.4.1).

□

3.5 Exercices

Exercice 10. *On admet que les solutions du problème de Dirichlet non linéaire*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y((a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{3.5.1}$$

sont sous la forme

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(x, y(s), y'(s))\, ds.$$

où

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{b-a}, & a \leq x \leq y; \\ \frac{(y-a)(x-b)}{b-a}, & y \leq x \leq b. \end{cases}$$

Supposons que f est bornée et soit y une solution du problème (3.5.1).

1. *Montrer que*

$$\int_a^b G(x,s)\, ds \leq \frac{(b-a)^2}{8} \tag{3.5.2}$$

$$\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds \leq \frac{b-a}{2}. \tag{3.5.3}$$

2. *En déduire qu' on a les estimations suivantes :*

$$\max_{a\leq x\leq b} |y(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

$$\max_{a\leq x\leq b} |y'(x)| \leq \frac{b-a}{2} \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

Exercice 11. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), & a < x < b; \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

Soit la fonction $h(x) = \frac{b\alpha - a\beta + (\beta-\alpha)x}{b-a}, x \in [a,b]$.

1. *Vérifier que h est une solution du problème*

$$\begin{cases} y''(x) = 0, & a < x < b; \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

2. *Mntrer que si y est solution du problème*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), & a < x < b; \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

   alors la fonction $\widetilde{y} = y + h$ est solution du problème

$$\begin{cases} \widetilde{y}''(x) = \widetilde{f}(x,\widetilde{y},\widetilde{y}'), & a < x < b; \\ \widetilde{y}(a) = \alpha, \widetilde{y}(b) = \beta \end{cases}$$

   où $\widetilde{f}(x,\widetilde{y},\widetilde{y}') = f(x, \widetilde{y} - h, \widetilde{y}' - h')$.

3. *Que peut-on-déduire.*

Exercice 12. *On considère le problème de Dirichlet non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y), & 0 < x < 1; \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{3.5.4}$$

On considère $f(x,y) = x^2 y$, $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. Montrer que le problème (3.5.4) admet une solution unique dans $C^2([0,1])$.

Exercice 13. *On considère le problème nonlinéaire suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(\alpha) = A, y(\beta) = B \end{cases} \tag{3.5.5}$$

1. *Montrer que y est une solution du problème (3.5.12) si et seulement si :*

$$y(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} A + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} B + \int_\alpha^\beta G(x,t) f(t, y(t))\, dt. \tag{3.5.6}$$

où $G(x,t)$ est la fonction de Green du problème

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(\alpha) = 0, y(\beta) = 0 \end{cases} \tag{3.5.7}$$

2. *On pose $l(x) = \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} A + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} B$. Soit $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par le schéma :*

$$\begin{cases} y_0(x) = l(x), \\ y_{n+1}(x) = l(x) + \int_\alpha^\beta G(x,t) f(t, y_n(t))\, dt, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Supposons que la fonction $f(x,y)$ est continue et uniformément Lipschitzienne sur $[a,b] \times \mathbb{R}$; c.à.d.

$$\exists L > 0 : |f(x, s_1) - f(x, s_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, s_1), (x, s_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

et

$$\theta = \frac{1}{8} L(\beta - \alpha) < 1$$

(a) *Montrer par récurrence que :*

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \theta^n \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y_1(x) - y_0(x)|. \tag{3.5.9}$$

(b) *Vérifier que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, on a :*

$$|y_n(x) - y_m(x)| \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y_1(x) - y_0(x)|. \tag{3.5.10}$$

(c) *En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction continue y dans $[\alpha, \beta]$ qui est la solution de l'équation (3.5.6).*

(d) *Montrer l'estimation d'erreur :*

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y_1(x) - y_0(x)|. \tag{3.5.11}$$

(e) *Montrer que la solution du problème (3.5.6) est unique.*

3. ***Application :*** *On considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} y'' = \sin y, \\ y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

   (a) *Calculer θ et déduire que ce problème admet une solution unique.*

   (b) *Calculer $y_0(x), y_1(x)$.*

   (c) *En déduire l'estimation :*

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m 0,06 \quad m \in \mathbb{N}.$$

Exercice 14. *On considère le problème nonlinéaire suivant :*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(\alpha) = A, y(\beta) = B \end{cases} \tag{3.5.12}$$

Supposons que la fonction $f(x, y, y')$ est continue et uniformément Lipschtzienne ; c.à.d.

$$|f(x, s_1, t_1) - f(x, s_2, t_2)| \leq L|s_1 - s_2| + M|t_1 - t_2|, \quad \forall (x, s_1, t_1), (x, s_2, t_2) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^2.$$

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} y_0(x) = l(x), \\ y_{n+1}(x) = l(x) + \int_\alpha^\beta G(x,t) f(t, y_n(t))\, dt, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où $l(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}A + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}B$ où $G(x,t)$ est la fonction de Green du problème (3.5.7).

1. *Montrer que si $\mu = \frac{1}{8}L(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{2}M(\beta - \alpha) < 1$, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution unique du problème .*

2. *Vérifier l'estimation d'erreur :*

$$\|y - y_m\| \leq \frac{\mu^m}{1 - \mu}\|y_1 - y_0\|, m = 0, 1, ...$$

   où $\|y\| = L \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x)| + M \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y'(x)|$.

Exercice 15. 1. *Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante par rapport à la seconde variable, alors le problème :*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(\alpha) = A, y(\beta) = B \end{cases}$$

   admet au plus une solution.

2. *Montrer que les problèmes aux limites suivants admettent au plus une solution :*

$$\begin{cases} y'' = y^3 + x, \\ y(0) = 0, y(1) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = y + \cos y + x^2, \\ y(0) = 1, y(1) = 5. \end{cases}$$

3.6 Corrigé d'exercices

Exercice 1

1. Par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x,s)\, ds &= \int_a^x \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}\, ds + \int_x^b \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}\, ds \\ &= \frac{(x-a)(x-b)}{2} \end{aligned}$$

En étudiant la variation de la fonction $[a,b] \ni x \mapsto \frac{(x-a)(x-b)}{2}$, on peut obtenir que :

$$\max \left| \frac{(x-a)(x-b)}{2} \right| = \frac{(b-a)^2}{8}$$

alors, on a

$$\int_a^b G(x,s)\, ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}. \tag{3.6.1}$$

On a également :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,s) \right| ds &= \int_a^x \frac{s-a}{b-a}\, ds + \int_x^b \frac{b-s}{b-a}\, ds \\ &= \frac{1}{2(b-a)}[(x-a)^2 + (b-x)^2]. \end{aligned}$$

En étudiant la variation de la fonction $[a,b] \ni x \mapsto (x-a)^2 + (b-x)^2$, on a

$$\max_{a \leq x \leq b} \left[(x-a)^2 + (b-x)^2 \right] = (b-a)^2$$

d'où :

$$\int_a^b \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,s) \right| ds \leq \frac{b-a}{2}. \tag{3.6.2}$$

2. Verifier directement.

Exercice 2 Verifier directement.

Exercice 3

Pour tout $(x, y_1), (x, y_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x^2 y_1 - x^2 y_2| = x^2 |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

donc f est 1-Lipschitz ($K = 1$). Comme $\theta = K\frac{b-a)^2}{8} = \frac{1}{8} < 1$ et sachanr que f est continue alors d'après le théorème 3.3.2 on a le résultat.

Exercice 4

1. On écrit :

$$y(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} A + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} B + \int_\alpha^x G(x,t) f(t, y(t))\, dt + \int_x^\beta G(x,t) f(t, y(t))\, dt.$$

alors

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{B - A}{\beta - \alpha} + G(x,x) f(x, y(x)) + \int_\alpha^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(t, y(t))\, dt \\ &\quad - G(x,x) f(x, y(x)) + \int_x^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(t, y(t))\, dt \\ &= \frac{B - A}{\beta - \alpha} + \int_\alpha^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(t, y(t))\, dt + \int_x^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(t, y(t))\, dt. \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) f(x, y(x)) + \int_\alpha^x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) f(t, y(t))\, dt \\ &\quad - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) f(x, y(x)) + \int_x^\beta \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) f(t, y(t))\, dt \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a les propriétées de la fonction de Green (voir chapitre 1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^+, x), \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) = \dfrac{\partial G}{\partial x}(x^-, x) \end{cases}$$

,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) = 1$$

et la fonction $x \mapsto G(x,t)$ est une solution de l'équation $y'' = 0$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} y''(x) &= \Big(\frac{\partial G}{\partial x}(x^+, x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x^-, x)\Big) f(x, y(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) f(t, y(t))\, dt. \\ &= f(x, y(x)). \end{aligned}$$

2. (a) Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|y_2(x) - y_1(x)| &= \Big|\int_\alpha^\beta G(x,t)\big[f(t,y_1(t)) - f(t,y_0(t))\big]\,dt\Big| \\
&\le \int_\alpha^\beta |G(x,t)||f(t,y_1(t)) - f(t,y_0(t))|\,dt \\
&\le L\int_\alpha^\beta |G(x,t)||y_2(t) - y_1(t)|\,dt \\
&\le L\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_2(x) - y_1(x)|\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\,dt \\
&\le \frac{L(\beta-\alpha)^2}{8}\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_2(x) - y_1(x)| = \theta\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_2(x) - y_1(x)|.
\end{aligned}$$

on a utilisé dans la dernière inégalité un résultat obtenu dans l'exercice 1 (voir l'inégalité (3.5.2)). Supposons que la propriété (3.5.9) est vraie pour l'ordre n et on la démontre pour l'ordre $n+1$.

$$\begin{aligned}
|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| &\le \int_\alpha^\beta |G(x,t)||f(t,y_{n+1}(t)) - f(t,y_n(t))|\,dt \\
&\le L\int_\alpha^\beta |G(x,t)||y_{n+1}(t) - y_n(t)|\,dt \\
&\le L\theta^n\int_\alpha^\beta |G(x,t)||y_1(t) - y_0(t)|\,dt \\
&\le L\theta^n\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_1(x) - y_0(x)|\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\,dt \\
&\le L\theta^n\theta\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_1(x) - y_0(x)| \\
&= L\theta^{n+1}\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_1(x) - y_0(x)|,
\end{aligned}$$

par conséquent, la relation (3.5.9) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n > m$, en utilisant la question (a) on obtient :

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - y_m(x)| &= \Big|\sum_{k=m}^{k=n-1} y_{k+1}(t) - y_k(t)\Big| \\
&\le \sum_{k=m}^{k=n-1} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \\
&\le \sum_{k=m}^{k=n-1} \theta^k\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_1(x) - y_0(x)| \\
&= \frac{\theta^m}{1-\theta}\max_{\alpha\le x\le\beta}|y_1(x) - y_0(x)|.
\end{aligned}$$

(c) Comme $\theta < 1$, alors d'après la question (b) on déduit que la suite $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy (uniformément dans $[\alpha, \beta]$) et par conséquent elle est uniformément convergente vers une foction $y(x)$ qui est continue évidement.

En faisant $n \to +\infty$ dans la relation (3.5.8), on obtient que y est une solution de l'équation (3.5.6).

(d) En faisant $n \to +\infty$ dans la relation (3.5.10), on obtient la relation (3.5.11).

(e) Supposons que le problème (3.5.6) admet deux solutions y et z, alors :

$$\begin{array}{rcl} |y(x) - z(x)| & \leq & \displaystyle\int_\alpha^\beta |G(x,t)||f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \\ & \leq & \displaystyle L \int_\alpha^\beta |G(x,t)||y(t) - z(t)|\, dt \\ & \leq & \displaystyle\frac{L(\beta-\alpha)^2}{8} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x) - z(x)| \\ & < & \displaystyle\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x) - z(x)|. \end{array}$$

Comme le dernier inégalité est stricte , alors on déduit que $\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x) - z(x)| = 0$ ce qui conduit à $y(x) = z(x)$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ et par suite l'unicité de la solution.

3. Application :

(a) On pose $f(x, y) = \sin y$, $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, on peut vérifier facilement que (utiliser théorème des accroissement finis par exemple) :

$$|f(x, y) - f(z, t)| = |\sin y - \sin t| \leq |y - t|, \quad \forall (x, y), (z, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Alors $L = 1$ et $\theta = \frac{L(\beta-\alpha)^2}{8} = \frac{1}{8}$, comme $\theta < 1$, alors d'après la première partie de l'exercice, on déduit que le problème admet une solution unique.

(b)

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & x \\ y_1(x) & = & \displaystyle x + \int_0^1 G(x,t) \sin t\, dt = x + x \sin 1 - \sin x. \end{array}$$

où

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-a)(t-b)}{b-a}, & a \leq x \leq t; \\ \frac{(t-a)(x-b)}{b-a}, & t \leq x \leq b. \end{cases}$$

(c) On a :

$$|y_1(x) - y_0(x)| = |x \sin 1 - \sin x| \leq 0,06$$

et de la relation (3.5.11), on a :

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \frac{8}{7}(\frac{1}{8})^m 0,06.$$

Exercice 5 La même méthode avec l'exercice 4.

Exercice 6

1. Supposons que y_1, y_2 deux solutions du problème, on pose $w = y_1 - y_2$, alors w est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w''(x) = f(x, y_1) - f(x, y_2), & \text{a<x<b;} \\ w(a) = w(b) = 0. \end{cases}$$

Comme f est croissante par rapport à deuxième variable, on a :

$$ww'' = (y_1 - y_2)f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq 0,$$

alors, par intégration par partie on obtient :

$$\int_a^b w(x)w''(x)\ dx = \int_a^b |w'(x)|^2\ dx \leq 0,$$

d'où : $w'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $w = C^{te}$, en utilisant les conditions aux limites, on obtient $w = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$.

2. Il suffit de vérifier que les fonctions $\mathbb{R} \ni y \mapsto y^3 + x$ et $\mathbb{R} \ni y \mapsto y + \cos y + x^2$ sont croissantes et remarquer que les fonctions $f(x, y) = y \mapsto y^3 + x; (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ et $f(x, y) = y \mapsto y^3 + x; (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ sont continues.