CHAPITRE 1

SUJETS D'EXAMENS

1.1 Examen final : 2018-2019

Durée : 1h :30 min

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(x), & a < x < b; \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

1. Montrer que la fonction de Green associée au problème (1.1.1) est donnée par

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{b-a}, & \text{si } y \geq x; \\ \frac{(y-a)(x-b)}{b-a}, & \text{si } y \leq x. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

2. Ecrire la solution unique du problème (1.1.1) sous forme intégrale.

3. (a) Calculer $\int_a^b G(x, s)\ ds$.

   (b) En déduire que $\left| \int_a^b G(x, s)\ ds \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8}$.

Exercice 2

Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y" = f(x, y, y'), & a < x < b; \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Soit la fonction $h(x) = \frac{b\alpha - a\beta + (\beta - \alpha)x}{b-a}, x \in [a, b]$.

1. Vérifier que h est une solution du problème

$$\begin{cases} y''(x) = 0, & a < x < b; \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{1.1.4}$$

2. Mntrer que si y est solution du problème

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a < x < b; \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

alors la fonction $\widetilde{y} = y + h$ est solution du problème

$$\begin{cases} \widetilde{y}''(x) = \widetilde{f}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}'), & a < x < b; \\ \widetilde{y}(a) = \alpha, \widetilde{y}(b) = \beta \end{cases} \tag{1.1.6}$$

où $\widetilde{f}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = f(x, \widetilde{y} - h, \widetilde{y}' - h')$.

3. Que peut-on-déduire.

Exercice 3

On considère le problème de Dirichlet non linéaire suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), & 0 < x < 1; \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

On admet que la solution du problème du (1.1.7) est de la forme

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s, y(s))\, ds.$$

Soit l'espace $X = C([0, 1])$ muni de la norme $\|u\| = \max_{x \in [0,1]} |u(x)|$. On pose $f(x) = x^2 y$.

1. Vérifier que f est Lipschitzienne par rapport y ; plus précisement :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|, \quad \forall x \in [0, 1], y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

2. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X \\ y &\mapsto Ty \end{aligned}$$

où

$$Ty(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s, y(s))\, ds.$$

Montrer que T est contractante ; plus précisement :

$$\|Ty - Tz\|_X \leq \frac{1}{8} \|y - z\|_X.$$

3. En déduire que T admet un point fixe. Justifer que le problème (1.1.7) admet une solution dans $C^2([0, 1])$.

1.2 Examen final : 2019-2020

Durée : 1h

(I) Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, considérons le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} y'' = h(x), & a < x < b; \\ y(a) = \alpha, y'(b) = \beta \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction de Green associée au problème (P_1) est donnée par
$$G(x,y) = \begin{cases} a - x, & \text{si } a \leq x \leq y; \\ a - y, & \text{si } y \leq x \leq b. \end{cases} \tag{1.2.1}$$
2. Ecrire la solution du problème (P_1) sous forme intégrale.
3. Vérifier que :
$$\int_a^b |G(x,y)|\, dy \leq \frac{(b-a)^2}{2}, \quad \int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\right| dy \leq (b-a).$$
4. Enoncer le théorème du point fixe pour les applications contractantes.

(II) On considère le problème de Dirichlet non linéaire suivant :

$$(P_2)\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), & a < x < b; \\ y(a) = 0, y'(b) = 0 \end{cases}$$

Supposons que $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et Lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables ; c.à.d. qu'il existe $K, L > 0$ tel que :

$$|f(x,y_1,z_1) - f(x,y_2,z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|, \quad \forall (x,y_1,z_1),(x,y_2,z_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

On admet que y est une solution du problème (P_2) si et seulement si :

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s,y(s),y'(s))\, ds.$$

Supposons que la restriction sur les constantes de Lipschitz s'écrit : $K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a) < 1$. Soit l'espace $E = C^1([a,b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{x\in[a,b]}(K|u(x)| + L|u'(x)|)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} T : E &\to E \\ y &\mapsto Ty \end{aligned}$$

où $Ty(x) = \int_a^b G(x,s) f(s,y(s),y'(s))\, ds; \quad \forall x \in [a,b]$.

1. Justifier pourquoi l'application T est bien définie.
2. Montrer que T est contractante.
3. En déduire que le problème (P_2) admet une solution unique dans $C^2([a,b])$.
4. *Application* : Vérifier que le problème :

$$(P_3)\begin{cases} y'' = \frac{1}{1+|y|} + \frac{1}{3}\sin y', \quad 0 < x < 1; \\ y(0) = 0, y'(1) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique dans $C^2([0,1])$.

1.3 Examen de rattrapage : 2019-2020

Exercice 1

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante par rapport à la seconde variable. On considère le problème suivant :

$$(P_1)\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(a) = A, y(b) = B \end{cases}$$

1. (a) Supposons que y_1, y_2 deux solutions du problème (P_1). Vérifier que $w = y_1 - y_2$ est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w''(x) = f(x,y_1) - f(x,y_2), \quad \text{a<x<b}; \\ w(a) = w(b) = 0. \end{cases}$$

   (b) Par intégration par partie, vérifier que :

$$\int_a^b |w'(x)|^2 \, dx \leq 0.$$

   (c) En déduire que le problème (P_1) admet au plus une solution.

2. Soit le problème suivant :

$$(P_2)\begin{cases} y'' = be^{ay} \\ y(0) = (1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une condition sur a et b pour que le problème (P_2) admet au plus une solution.

Exercice 2

On considère le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(x,y) \\ y(\alpha) = A, y(\beta) = B \end{cases} \tag{1.3.1}$$

On admet que y est une solution du problème (1.3.1) si et seulement si :

$$y(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}A + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}B + \int_\alpha^\beta G(x,t)f(t,y(t))\,dt. \tag{1.3.2}$$

où $G(x,t)$ est la fonction de Green du problème $\begin{cases} y'' = 0, \\ y(\alpha) = 0, y(\beta) = 0 \end{cases}$.

On pose $l(x) = \frac{\beta-x}{\beta-\alpha}A + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}B$, soit $(y_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par le schéma :

$$\begin{cases} y_0(x) = l(x), \\ y_{n+1}(x) = l(x) + \int_\alpha^\beta G(x,t)f(t,y_n(t))\,dt, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Supposons que la fonction $f(x,y)$ est continue et uniformément Lipschitzienne sur $[a,b]\times\mathbb{R}$; c.à.d.

$$\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in [a,b]\times\mathbb{R}.$$

On suppose que $\theta = \frac{1}{8}L(\beta-\alpha) < 1$.

1. Montrer par récurrence que :

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \theta^n \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y_1(x) - y_0(x)|. \tag{1.3.4}$$

2. Vérifier que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, on a :

$$|y_n(x) - y_m(x)| \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y_1(x) - y_0(x)|. \tag{1.3.5}$$

3. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction continue y dans $[\alpha,\beta]$ qui est la solution de l'équation (1.3.2).

1.4 Corrigé type d'examen final 2019-2020

I) 2,5+2,5+3+2=10pts

1. Soit φ_1, φ_2 les solutions des problèmes

$$\begin{cases} \varphi_1'' = 0, \\ \varphi_1(a) = 0, \varphi_1'(a) = -1. \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \varphi_2'' = 0, \\ \varphi_2(b) = 1, \varphi_2'(b) = 0. \end{cases}$$

respectivement. Alors $\varphi_1(x) = -x + a$ et $\varphi_2(x) = 1$ donc leur Wronskien $W(x) = 1$ et par suite :

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y)}{W(x)}, & \text{si } a \le x \le y; \\ \frac{\varphi_1(y)\varphi_2(x)}{W(y)}, & \text{si } y \le x \le b. \end{cases} = \begin{cases} a - x, & \text{si } a \le x \le y; \\ a - y, & \text{si } y \le x \le b. \end{cases}$$

2. Soit ψ_1, ψ_2 les uniques solutions des problèmes :

$$\begin{cases} \psi_1'' = 0, \\ \psi_1(a) = \alpha, \psi_1'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \psi_2'' = 0, \\ \psi_2(a) = 0, \psi_2'(b) = \beta. \end{cases}$$

donc $\psi_1(x) = \alpha$ et $\psi_2(x) = \beta(x - \alpha)$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} y(x) &= \psi_1(x) + \psi_2(x) + \int_a^b G(x,y)h(y)\,dy \\ &= \alpha + \beta(x-\alpha) + \int_a^x (a-y)h(y)\,dy + \int_x^b (a-x)h(y)\,dy. \end{aligned}$$

3. On a : $\int_a^b |G(x,y)|\,dy = \int_a^x (y-a)\,dy + \int_x^b (x-a)\,dy = (x-a)(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + b) = k(x)$, d'où $k'(x) = b - x \ge 0$ pour tout $x \in [a,b]$, on déduit que

$$\int_a^b |G(x,y)|\,dy \le \max_{x\in[a,b]} (x-a)(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a + b) = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

On a $\int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\right| dy = \int_x^b \,dy = b - x \le \max_{x\in[a,b]}(b-x) = b - a.$

4. **Théorème du point fixe des applications contractantes (de Banach) :** Soit E un espace métrique complet et f une application contractante de E dans E, alors il existe dans E un unique point fixe dans E.

II) 2+4+2+2=10pts

1. Comme le problème homogène n'admet pas de solution non triviale, alors la fonction de Green existe et unique, d'autre part la continuité des G et f assure que l'intégrale est fini et l'image $Ty \in E = C^1([a,b])$.

2. On montre qu'il existe $C \in]0,1[$ tel que pour tout $y_1, y_2 \in E$, on a : $\|Ty_1 - Ty_2\| \leq C\|y_1 - y_2\|$, En effet, soit $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
|Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= |\int_a^b G(x,s)f(s,y_1(s),y_1'(s))\,ds - \int_a^b G(x,s)f(s,y_2(s),y_2'(s))\,ds| \\
&\leq \int_a^b |G(x,s)||f(s,y_1(s),y_1'(s)) - f(s,y_2(s),y_2'(s))|\,ds \\
&\leq \int_a^b |G(x,s)|(K|y_1(s) - y_2(s)| + L|y_1'(s) - y_2'(s)|)\,ds \\
&\leq \max_{x\in[a,b]}(K|y_1(x) - y_2(x)| + L|y_1'(x) - y_2'(x)|)\int_a^b |G(x,s)|\,ds \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2}\|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
|Ty_1'(x) - Ty_2'(x)| &= |\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)f(s,y_1(s),y_1'(s)) - f(s,y_2(s),y_2'(s))\,ds| \\
&\leq \int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)|(K|y_1(s) - y_2(s)| + L|y_1'(s) - y_2'(s)|)\,ds \\
&\leq \max_{x\in[a,b]}(K|y_1(x) - y_2(x)| + L|y_1'(x) - y_2'(x)|)\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)|\,ds \\
&\leq (b-a)\|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

par un calcul simple, pour tout $x \in [a,b]$ on obtient :

$$K|Ty_1(x) - Ty_2(x)| + L|Ty_1'(x) - Ty_2'(x)| \leq \big(K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a)\big)\|y_1 - y_2\|.$$

d'où $\|Ty_1 - Ty_2\| \leq \big(K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a)\big)\|y_1 - y_2\|$, comme $K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a) < 1$ donc il suffit de prendre $C = K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a)$ et par suite T est contractante.

3. Comme $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $T : E \to E$ est contractante, alors en vertu du théorème du point fixe de Banach, T admet un point fixe unique $y \in E$; c.à.d.

$$y(x) = Ty(x) = \int_a^b G(x,s)f(s,y(s),y'(s))\,ds; \quad \forall x \in [a,b].$$

Par conséquent, le problème (P_2) admet une solution unique dans E. De plus comme f est continue alors y'' est continue et par suite $y \in C^2([a,b])$.

4. On pose $f(x,y,z) = \frac{1}{1+|y|} + \frac{1}{3}\sin z$. On remarque que f est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^2$, de plus elle est Lipschitzienne ; en effet pour tout $(x,y_1,z_1),(x,y_2,z_2) \in [0,1]\times\mathbb{R}^2$, on a : $|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_2,z_2)| \leq \frac{\left||y_1|-|y_2|\right|}{1+|y_1|} + \frac{1}{3}|\sin z_1 - \sin z_2| \leq \frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1|} + \frac{1}{3}|z_1-z_2| \leq |y_1-y_2| + \frac{1}{3}|z_1-z_2|$. Comme $K\frac{(b-a)^2}{2} + L(b-a) = \frac{5}{6} < 1$, alors d'après la partie précédente on déduit que le problème (P_3) admet une solution unique dans $C^2([0,1])$.