UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ des MATHEMATIQUES et de l'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT de MATHEMATIQUES

Première année Master EDPs et Applications

Semestre II

N. Benhamidouche

Analyse numériqu des EDPS - suite

Année: **2019/2020**

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappels

1.2 Principe de la méthode des différences finies

Déja présenté avant les vacances

Chapitre 2

Différences finies pour l'équation de la chaleur

2.1 Déscription la méthode

Soit le problème de chaleur suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [a, \quad b] \\ \text{avec conditions aux bords } u(a,t) = u(b,t) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

On veut résoudre cette équation par la méthode des différences finies , on doit donc la discrétiser , en posant

$x = ih$, $t = jk$, avec les pas de déscritisation $h = \Delta x$ et $= \Delta t$, i, j ϵ $(1, 2, .., N)$, on pose $u_{i,j} = u(ih, jk)$.

La condition initiale s'écrit $u_{i,0} = f_i$;

2.1.1 Discrétisation des dérivées;

La dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ peut êre discrétisée par trois manières:

1. Dérivée à droite

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j}}{k} \tag{2.2}$$

2. Dérivée à gauche

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,,j-1}}{k} \tag{2.3}$$

3. Dérivée centrée

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j-1}}{2k} \tag{2.4}$$

Pour la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ elle peut être discrétisée d'une seule manière

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j} + u_{i,,j}}{h^2} \tag{2.5}$$

Ce qui conduit à plusieurs schémas pour l'équation de la chaleur , qu'on va les détailler.

2.1.2 Les Différents Schémas de différences finies:

On va a présenter les differents schémas de l'équation de la chaleur;

1. Schéma explicite

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,,j}) + (1 - \frac{k}{h^2})u_{i,j} \tag{2.6}$$

2. Schéma implicite

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1}) + u_{i,j} \tag{2.7}$$

3. Schéma de Crank Nicolson

c'est la moyenne des deux schémas précedents

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,,j}) + (2 - \frac{k}{h^2})u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1})\right] \tag{2.8}$$

4. Schéma générale, appelé aussi R-schéma

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2}\left[(1-R)(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j} - 2u_{i,,j}) + R(u_{i+1,,j+1} + u_{i-1,,j+1} - 2u_{i-1,,j+1})\right] \tag{2.9}$$

5- Schéma "Saut-mouton"

On obtient ce schéma en utilisant le schéma centré en temps

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.10}$$

qui s'écrit comme

$$u_{i,j+1} = \frac{2k}{h^2}(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) - \frac{2k}{h^2}u_{i,j} + u_{i,,j-1} \tag{2.11}$$

6. Schéma de Dufor-Franel .

Il s'agit de remplacer le terme $u_{i,j}$ dans le schéma (2.10) par la moyenne $\frac{u_{i,,j+1}+u_{i,,j-1}}{2}$. on obtient

$$u_{i,j+1} = \frac{2k}{h^2}(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) - \frac{2k}{h^2}(u_{i,,j+1} + u_{i,,j-1}) + u_{i,,j-1}$$

qui s'écrit comme

$$(1 - \frac{2k}{h^2})u_{i,j+1} = \frac{2k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + (1 - \frac{2k}{h^2})u_{i,j-1} \tag{2.12}$$

on a va aborder dans dans le prochain chapitre le principe de stabilité des schémas

Chapitre 3

Stabilité des schémas des différences finies

3.1 Définitions et propriètes

Définition 3.1.1 *Un schéma est dit stable si* $\forall h, k$ *et* $\forall n/\ nk < T$, *la solutionn du problème discret reste bornée pour une condition initiale bornée.* h, k,*désigne les pas de l"espace et du temps.*

Il existe plusieurs méthodes de démontrer la stabilité , on peut citer la stabilité au sens L^{∞}, la stabilité *par* la méthode de fourier (au sens l^2) appelée aussi méthode de Von neuman.

3.2 Stabilté au sens L^{∞}

Définition 3.2.1 *Par définition le schéma est dit stable au sens* L^{∞},*si* $Max\,|u_{i,j}| \leq |u_{i,0}| \leq M.$ $\forall h, k$ *et* $\forall n/\ nk < T$,

3.2.1 Stabilité du schéma explicite du problème de la chaleur

Le schéma explicite s'écrit comme

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) + (1 - 2\frac{k}{h^2})u_{i,j}$$

On va démontrer que $Max\,|u_{i,j}| \leq |u_{i,0}|$, pour cela on pose $\lambda = \frac{k}{h^2}$, le schéma s'écrit comme;

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,,j} + \lambda u_{i-1,,j} + (1-2\lambda)u_{i,j}. \tag{3.1}$$

On démontre par récurrence, en effet pour $j = 0$, on a

$$u_{i,1} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,,0} + u_{i-1,,0}) + (1 - 2\frac{k}{h^2})u_{i,0},$$

cela implique

$$|u_{i,1}| \leq \lambda\,|u_{i+1,0}| + \lambda\,|u_{i-1,,0}| + (1-2\lambda)\,|u_{i,0}|$$

si la condition initiale est bornée c'est à dire $|u_{i,0}| \leq M$, alors on obtient

$$|u_{i,1}| \leq \lambda M + \lambda M + (1-2\lambda)M = M$$

par récurrence sur j, en supposant qu'elle est vrai pour tout j, on a

$$|u_{i,j+1}| \leq \lambda\,|u_{i+1,j}| + \lambda\,|u_{i-1,j}| + (1-2\lambda)\,|u_{i,j}| = M$$

d'où

$$|u_{i,j+1}| \leq \lambda M + \lambda M + (1-2\lambda)M = M \tag{3.2}$$

donc la solution discrète $u_{i,j}$, est bornée, pour tout j, donc $Max\,|u_{i,j}| \leq M$. Le schéma explicite est donc stable si la condition suivante est vérifiée $(1-2\lambda) > 0$,

ce qui implique $\lambda < \frac{1}{2}$, donc on la condition

$$k < \frac{h^2}{2} \tag{3.3}$$

cette condition est appelée CFL.

On peut aussi démontrer la stabilité des schémas en utilisant le principe de combinaison convexe,

Définition 3.2.2 *Combinaison convexe*

Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ est dite combinaison convexe si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, et $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Proposition 3.2.1 *Si un schéma numérique est une combinaison convexe alors il est stable.*

Exemple 3.2.1 *le schéma explicite est une combinaison convexe, en effet dans* (3.1) *, on voit bien qu'on a* $\lambda + \lambda + 1 - 2\lambda = 1$, *et* $\lambda > 0$ *et* $(1 - 2\lambda) > 0$

cela implique $\lambda < \frac{1}{2}$, donc on retrouve la condition CFL $k < \frac{h^2}{2}$.

Exemple 3.2.2 *Le Schémas de Dufor-Franel est stable, en effet on peut écrire* (2.12) *comme*

$$(1 + 2\lambda)u_{i,j+1} = 2\lambda(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) + (1 - 2\lambda)u_{i,,j-1}$$

qui s'écrit finalement sous la forme

$$u_{i,j+1} = \frac{2\lambda}{(1 + 2\lambda)}(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) + \frac{(1 - 2\lambda)}{(1 + 2\lambda)}u_{i,,j-1} \tag{3.4}$$

On peut vérifier que ce schéma est une combinaison convexe, en effet on a la somme

$$\frac{2\lambda}{(1 + 2\lambda)} + \frac{(1 - 2\lambda)}{(1 + 2\lambda)} = 1$$

et on doit avoir $\frac{2\lambda}{(1+2\lambda)} > 0$, qui est vérifié et on doit avoir aussi $\frac{(1-2\lambda)}{(1+2\lambda)} > 0$, cela implique $\lambda < \frac{1}{2}$, on a ici la stabilté sous la condition CFL. c'est à dire $k < \frac{h^2}{2}$.

Remarque:

A. Le schéma "Saut-mouton" est instable .

B. Le schémas implicite est stable, $\forall h, k$, dans ce cas est dit Inconditionnellement stable.

C. le schémas de Crank Nicolson est stable sous condition $k < h^2$.

D. Le schéma générale R-schéma est stable sans condition avec $\frac{1}{2} \leq R \leq 1$, et avec condition si $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2R)}$.

3.3 Stabilité au sens de Von-Neuman- Stabilité au sens de Fourier

On va exposer une autre méthode pour démontrer la stabilté des schémas, cette méthode est appelée "Von-Neuman" basée sur la transformée de fourier dont le principe est le suivant:

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & , \end{cases} c$$

le principe est de supposer que $u_0(x)$ est bornée , par exemple $u_0(x) = \sin(px)$, la solution exacte donnée par $u(x,t) = \sin(px)e^{-p^2 t}$ (selon Fourier).

L'objectif est de démontrer que la solution discrète $u_{i,j}$ d'un schéma quelconque reste bornée pour la condition initiale bornée $u_{i,0}$.

3.3.1 Schéma explicite par Von neumann

Prenons par exemple le schéma explicite (3.1) qui s'écrit comme

$$u_{i,j+1} = u_{i,,j} + \lambda(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) - 2\lambda u_{i,,j}$$

On a $u_{i,0} = \sin(pih)$, on démontre par récurrence qu'on a

$$u_{i,j} = A^j \sin(pih)$$

et donc dans ce cas une condition néccesssaire de stabilité s'écrira bien évidemment $\forall$ p, h, $|A| < 1$, pour que $u_{i,j}$ reste bornée si , j augmente. On doit trouver A.

pour $j = 0$, on a

$$u_{i,1} = \sin(pih) + \lambda(\sin(p(i+1)h) + \sin(p(i-1)h)) - 2\lambda\sin(pih), \tag{3.5}$$

On peut remarque que

$$\sin(p(i+1)h) + \sin(p(i-1)h) = 2\sin(pih)\cos(ph) \tag{3.6}$$

Alors (3.5), s'écrit comme

$$u_{i,1} = \sin(pih) + \lambda(2\sin(pih)\cos(ph)) - 2\lambda\sin(pih),$$

Qu'on peut écrire

$$u_{i,1} = \sin(pih)\left[1 + 2\lambda\cos(ph)) - 2\lambda\right],$$

qui peut être écrite sous la forme

$$u_{i,1} = \sin(pih)\left[1 - 4\lambda\sin^2(\frac{ph}{2})\right], \tag{3.7}$$

qui s'écrit

$$u_{i,1} = A\sin(pih), \text{ avec } \quad A = \left[1 - 4\lambda\sin^2(\frac{ph}{2})\right]$$

par récurrence sur j , on obtient

$$u_{i,j} = A^j\sin(pih), \text{ avec } \quad A = \left[1 - 4\lambda\sin^2(\frac{ph}{2})\right]$$

comme on a trivialement $A < 1$, reste la condition $A > -1$, pour avoir $|A| < 1$.

Cela implique $1-4\lambda\sin^2(\frac{ph}{2}) > -1$, donc $4\lambda\sin^2(\frac{ph}{2}) > 2$, d'où $\lambda < \frac{1}{2}$, donc on obtient la condition CFL $k < \frac{h^2}{2}$. pour le schéma explicite.

3.3.2 Stabilité du schéma générale par Von Neumann

Le Schéma générale s'écrit sous la forme

$$u_{i,j+1} = u_{i,,j} + \frac{k}{h^2}\left[(1-R)(u_{i+1,,j} + u_{i-1,,j}) - 2u_{i,,j}) + R(u_{i+1,,j+1} + u_{i-1,,j+1} - 2u_{i-1,,j+1})\right] \tag{3.8}$$

Si $u_{i,0} = \sin(pih)$, de même manière nous allons montrer par récurrence que

$$u_{i,j} = A^j\sin(pih) \tag{3.9}$$

une condition néccesssaire de stabilité s'écrira $\forall\, p, h,\ |A| < 1$, pour que $u_{i,j}$ reste bornée si , j augmente.

en remplaçant (3.9) dans (3.8), et en utilsant les relations (3.6), (3.7), et après simplification par $A^j\sin(pih)$, on obtient

$$A = 1 + \lambda\left[(1-R) + RA\right]\left[-4\sin^2(\frac{ph}{2})\right] \tag{3.10}$$

cela implique

$$A = \frac{1-(1-R)B}{1+RB} = 1 - \frac{B}{1+RB}, \quad \text{avec} \quad B = 4\lambda \sin^2(\frac{ph}{2}) \tag{3.11}$$

pour avoir $|A| < 1$, d'abord on voit bien que $A < 1$, avec $B > 0$. et $0 < R < 1$, reste la condition $A > -1$, c'est à dire

$$A > -1 \Rightarrow 1 - \frac{B}{1+RB} > -1 \Rightarrow \frac{B}{1+RB} \leq 2, \tag{3.12}$$

c'est à dire

$$B(1-2R) \leq 2, \quad \text{avec } B > 0 \tag{3.13}$$

On constate que si $\frac{1}{2} \leq R \leq 1$, la relation (3.13) est satisfaite, cela veut dire que le schéma implcite $(R = 1)$ et le schéma de Crank Nicolson $(R = 1)$ sont inconditionnelement stable $\forall h$, k . et de même pour tous les autres shémas entre les deux, sont stables aussi.

Par contre pour $0 \leq R < \frac{1}{2}$; la condition de stabilité (3.13) s'écrit $B \leq \frac{2}{(1-2R)}$ c'est à dire

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-2R)}, \tag{3.14}$$

par exemple pour le schéma explicite $(R = 0)$, on a $\lambda < \frac{1}{2}$, on obtient donc la condition CFL $k < \frac{h^2}{2}$.

Résumé :

Schéma explicite

1. Stabilité $L^\infty \rightarrow$ oui avec $k < \frac{h^2}{2}$. CFL
2. Stabilité Von neumann $\rightarrow$ oui avec $k < \frac{h^2}{2}$. CFL

Schéma implicite

1. Stabilité $L^\infty \rightarrow$ oui toujours sans condition
2. Stabilité Von neumann $\rightarrow$ oui toujours sans condition

Schéma Crank Nicolson

1. Stabilité $L^\infty \rightarrow$ oui avec $k < h^2$.
2. Stabilité Von neumann $\rightarrow$ oui toujours sans condition

Schéma Générale - R-schéma

1. Stabilité $L^\infty \rightarrow$ oui sans condition avec $\frac{1}{2} \leq R \leq 1$, et avec condition $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2R)}$.

2. Stabilité Von neumann $\rightarrow$ oui avec condition $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2R)}$ pour $0 \leq R < \frac{1}{2}$.

Schéma Frank Duffort

1. Stabilité $L^\infty \rightarrow$ oui avec $k < \frac{h^2}{2}$. CFL.

2. Stabilité Von neumann $\rightarrow$ oui toujours sans condition

Schéma Saut Mouton

Schéma instable

3.4 Différences finies pour d'autres problèmes

3.4.1 Problème de transport

L'équation de transport s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = C\frac{\partial u}{\partial x}, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & , \end{array}$$

En tenant compte de la discrétisation suivante :

$x = ih$, $t = jk$, avec les pas de déscritisation $h = \Delta x$ et $= \Delta t$, i, j ϵ $(1, 2, .., N)$, on pose $u_{i,j} = u(ih, jk)$.

La condition initiale s'écrit $u_{i,0} = f_i$;

Cette équation admet plusieurs schémas numérique de différences finies, selon la discrétisation de la dérivée temporelle et spatiale. en tout on a neuf (9) schémas

Schémas explicites

1- On prend la dérivée à droite pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j}}{k},$$

et la dérivée à droite pour

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i,,j}}{h},$$

, ce qui amène

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h}(u_{i+1,,j} - u_{i,,j}) + u_{i,,j} \tag{3.15}$$

2- On prend la dérivée à droite pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j}}{k},$$

et la dérivée à gauche pour

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,,j} - u_{i-1,,j}}{h},$$

ce qui amène

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h}(u_{i,,j} - u_{i-1,,j}) + u_{i,,j} \tag{3.16}$$

3- On prend la dérivée à droite pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j}}{k},$$

et la dérivée centrée pour

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}}{2h},$$

ce qui amène

Schémas implicites

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{2h}(u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}) + u_{i,,j} \tag{3.17}$$

1- On prend la dérivée à gauche pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,,j-1}}{k},$$

et la dérivée à droite pour

$$r\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i,,j}}{h},$$

ce qui amène

$$u_{i,j} = \frac{k}{h}(u_{i+1,,j} - u_{i,,j}) + u_{i,,j-1}$$

qui s'écrit comme

$$(1 + \frac{k}{h})u_{i,j} = \frac{k}{h}(u_{i+1,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.18}$$

2. On prend la dérivée à gauche pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,,j-1}}{k}$,et la dérivée à gauche pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,,j} - u_{i-1,,j}}{h}$, ce qui amène

$$(1 - \frac{k}{h})u_{i,j} = -\frac{k}{h}(u_{i-1,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.19}$$

3. On prend la dérivée à gauche pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,,j-1}}{k}$,et la dérivée centrée pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}}{2h}$, ce qui amène

$$u_{i,j} = \frac{k}{2h}(u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.20}$$

4. On prend la dérivée centrée pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j-1}}{2k}$,et la dérivée à droite pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i,,j}}{h}$, ce qui amène

$$u_{i,j+1} = \frac{2k}{h}(u_{i+1,,j} - u_{i,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.21}$$

5- On prend la dérivée centrée pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j-1}}{2k}$,et la dérivée à gauche pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,,j} - u_{i-1,,j}}{h}$, ce qui amène

$$u_{i,j+1} = \frac{2k}{h}(u_{i,,j} - u_{i-1,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.22}$$

6- On prend la dérivée centrée pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,,j-1}}{2k}$,et la dérivée centrée pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}}{2h}$, ce qui amène

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h}(u_{i+1,,j} - u_{i-1,,j}) + u_{i,,j-1} \tag{3.23}$$

3.4.2 Etude de stabilité de quelques shémas de l'équation de transport

Il n'est pas facile d'étudier la stabilité des schémas du problème de transport , surtout pour le cas implicite, on essaye de vérifier la stabilité L^{∞} pour certains schémas, par exemple le schéma (3.15)

$$u_{i,j+1} = \frac{k}{h}(u_{i+1,,j} - u_{i,,j}) + u_{i,,j}$$

On applique le principe de convexité , en écrivant le schéma (3.15), sous la forme

$$u_{i,j+1} = \alpha u_{i+1,,j} + (1-\alpha)u_{i,,j}$$

La somme des coefficients est égale à 1, et $\alpha = \frac{k}{h} > 0$, et on doit avoir aussi $(1-\alpha) > 0$, cela implique $\alpha < 1$, donc ce shéma est stable si $k < h$.

Exercice 3.4.1 *vérifier la stabilité des autres schémas explicites.*

Réferences

[1] D. Euvrard, Résolution numérique des équations différentielles , Masson, (1994).

[2] Linear Partial Differential equations, Tyn Myint, Lokenath Debnath, Birkhauser. (2007).