Université De M'sila
Faculté des Mathematiques et de l'Informatique
Departement de Mathematiques

Première année Master EDPs et Applications
Semestre II

**N. Benhamidouche**

# Similarité dans les EDPS - suite

Année: **2019/2020**

# Table des matières

# Chapitre 1

# Solutions auto similaires

## 1.1 Définitions et propriètés

### 1.1.1 Introduction

L'étude et la résolution des EDPs d'évolution repose sur plusieurs méthodes , il y'a tout d'abord l'étude d'existence et de l'unicité de la solution, où on utilise les méthodes classiques telle que le point fixe ou méthode de compacité.

En suite il y'a les méthodes numériques pour chercher des solutions approchées, où on utilise par exemple la méthode de différences finies où autres méthodes.

Enfin il y'a les méthode de recherche de solutions particulières exactes ou approchées, les solutions approchées sont sous la forme d'une série par exemple. ar contre pour les solutions particulières exactes

on peut citer les solutions dites "solutions auto-similaires".

la recherche de solutions analytiques exactes ou approchées est interressante pour comparer en analyse numérique avec la solution calculée et aussi dans le cas théorique pour voir le comportement de la solution étudiée.

Les solutions auto-similaires jouent un grand rôle dans les équations aux dérivées partielles d'évolution, elles permettent surtout de déterminer le comportement en temps des solutions au voisinage de l'infini ou zéro.

Ce type de solutions sont considérés comme des solutions particulières, leurs formes dépend d'un profil appelé parfois anzas.

il existe plusieurs forme de solutions auto similaires.

**Définition 1.1.1** *Une solution d'EDPs est dite* ***auto-similaire si elle invariante par échelle , c'est à dire****:*

$$u\,(x,t) \to a^{\lambda} u\,(a^{s}x, a^{\gamma}t)\ , \qquad a > 0 \tag{1.1}$$

### 1.1.2 Conditions d'invariances d'échelles:

**Définition 1.1.2** *Soit* $P\,(x,t,u,\ldots) = 0$, *une équation aux dérivées partielles alors,* $P$ *admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante (par échelle) sous l'action de dilatation, c'est-à-dire si on fait le changement de variables suivant:*

$$u = a^{\lambda}u, \qquad x = a^{s}x; \qquad t = a^{\gamma}t, \tag{1.2}$$

*avec* $a > 0$ *et* $\lambda, s, \gamma.$ *sont des paramètres positives, on l'équation* $P\left(a^{s}x, a^{\gamma}t, a^{\lambda}u, \ldots\right) = 0,$ *donc si on a* $P\,(x,t,u,\ldots) = 0$ *alors* $P\left(a^{s}x, a^{\gamma}t, a^{\lambda}u, \ldots\right) = 0.$

### 1.1.3 Regles de dérivation:

pour vérifier la similarité on applique la règle de dérivation suivante

$$\frac{\partial(a^{\lambda}u)}{\partial(a^{\gamma}t)} = a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial(a^{\lambda}u)}{\partial(a^{s}x)} = a^{\lambda-s}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.3}$$

Si on pose $a^{\gamma}t = 1$, alors $a^{\lambda}u\,(a^{s}x, 1) \to a^{\lambda}\phi\,(a^{s}x)\,,$ d'où $a = t^{\frac{-1}{\gamma}}$, alors on a

$$u(x,t) = t^{\frac{-\lambda}{\gamma}}\phi\left(t^{\frac{-s}{\gamma}}x\right),$$

cette forme de solution auto similaire est dite trés singulière .

**Proposition 1.1.1** *Soit l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

alors $u(x,t) \to a^{\lambda} u(a^s x, a^{\gamma} t)$ implique

$$\frac{\partial (a^{\lambda} u)}{\partial (a^{\gamma} t)} = a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial u}{\partial t} \; et \quad \frac{\partial^2 (a^{\lambda} u)}{\partial (a^s x)^2} = a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

l'équation devient $a^{\lambda-\gamma}\frac{\partial u}{\partial t} = a^{\lambda-2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, d'où on a $a^{\lambda-\gamma} = a^{\lambda-2s}$ ainsi la condition de similarité sera

$$\lambda - \gamma = \lambda - 2s \Rightarrow \gamma = 2s. \tag{1.4}$$

si on pose $a^{\gamma} t = 1 \Rightarrow a = t^{\frac{-1}{\gamma}}$, cela implique

$$u(x,t) \to a^{\lambda} u(a^s x, a^{\gamma} t) \Rightarrow t^{\frac{-1}{\gamma}} u(a^s x, 1) \Rightarrow t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} \phi\left(t^{\frac{-s}{\gamma}} x\right) \tag{1.5}$$

puisque on a $\gamma = 2s$. on on obtient la forme $t^{\frac{-\lambda}{\gamma}} \phi\left(t^{\frac{-1}{2}} x\right)$

Ceci donne une forme particulière de solutions auto similaires qui s'écrit comme

$$u(x,t) = t^{\alpha}\phi(\xi), \qquad \xi = x t^{-\beta},$$

pour l'équation de la chaleur la valeur de $\beta$ est égale à $\frac{1}{2}$.

On transforme donc l'EDP à une équation différentielle de variable $\xi$, l'objectif est de trouver la fonction $\phi$ qui sera solution d'une équation différentielle et les exposants $\alpha$ et $\beta$.

## 1.2 Problème de la chaleur

Rappels: on a travaillé avant les vacances sur les solutions auto similaires de type

$$u(x,t) = t^{\alpha}\phi(\xi), \qquad \xi = x t^{-\beta}, \tag{2.1}$$

pour quelques équations aux dérivées partielles , et en particulier l'équation de la chaleur.

en effet

soit l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on veut chercher la solution sous la forme

$$u(x,t) = t^{\alpha}\phi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right),$$

on remplace dans l'équation de la chaleur, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1}\phi - \beta x t^{-\beta+\alpha-1}\phi',$$

si on pose $\xi = \frac{x}{t^{\beta}}$,alors $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1}\phi - \beta\xi t^{\alpha-1}\phi_{\xi}$, de meme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{\alpha-2\beta}\phi_{\xi\xi}$,

donc on a $\alpha t^{\alpha-1}\phi - \beta\xi t^{\alpha-1}\phi_{\xi} = t^{\alpha-2\beta}\phi_{\xi\xi}$, on divise par $t^{\alpha-1}$, on obtient $\alpha\phi - \beta\xi\phi_{\xi} = t^{1-2\beta}\phi_{\xi\xi}$, dérivont par $t$, cela implique $0 = (1-2\beta)t^{-2\beta}\phi_{\xi\xi}$, d'où $1-2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$.

l'équation différentielle correspondante est :

$$\alpha\phi - \frac{1}{2}\xi\phi_{\xi} = \phi_{\xi\xi} \tag{2.2}$$

et le but est de trouver pour chaque problème $\alpha$ et $\phi$.

on peut utiliser plusieur méthodes selon le problème et le choix de $\alpha$.

# Chapitre 2

# Recherche de profils et exposants

On va présenter quelques méthodes pour déterminer les exposants $\alpha$ et $\beta$ et le profil $\phi$ qui est solution de l'équation différentielle

## 2.1 Méthodes particulières

### 2.1.1 Méthode du développement fini:

Soit $\phi = \sum_{i=0}^{i=\infty} a_i x^i$, une fonction assez régulière , d'où on a

$$\phi^{'} = \sum_{i=1}^{1=\infty} i a_i \xi^{i-1},$$

et

$$\phi^{''} = \sum_{i=2}^{1=\infty} i(i-1) a_i \xi^{i-2},$$

et

$$\xi\phi^{'} = \sum_{i=1}^{1=\infty} i a_i \xi^{i}$$

l'équation $\alpha\phi - \frac{1}{2}\xi\phi_\xi = \phi_{\xi\xi}$ devient
$\alpha a_0 - 2a_2 + \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) a_1 - 6a_3\right]\xi + ... + \left[\left(\alpha - \frac{i}{2}\right) a_i - (i+2)(i+1)a_i\right]\xi^i + ... = 0$
cela implique

$$\alpha a_0 - 2a_2 = 0 \qquad et \qquad \left(\alpha - \frac{i}{2}\right) a_i - (i+2)(i+1)a_i = 0$$

On discute selon les valeurs de $\alpha$ : Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ et $a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \quad (i = 1)$ et donc tous les coefficients d'indices impaires sont nuls , reste les indices paires

on pose $i \rightarrow 2i$

$$\alpha a_0 = 2a_2 \quad \text{et} \qquad (\alpha - i)\, a_{2i} = (2i+2)(2i+1)a_{2i+2}$$

d'où

$$a_{2i+2} = \frac{(\alpha - i)}{(2i+2)(2i+1)} a_{2i}$$

Pour tout i , l'équation différentielle devient :

$$\alpha a_0 + \frac{a_0}{2!}\alpha\xi^2 + \frac{a_0\alpha(\alpha-1)}{4!}\xi^4 + ... + \frac{a_0\alpha(\alpha-1)...}{(2i)!}\xi^{2i} = \ 0$$

Si $a_0 = 1$, cela donne le développement limité de la fonction $e^{\frac{-\xi^2}{4}}$, qui est $1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{24} + ....$ce qui donne donc $\alpha = -\frac{1}{2}$

La solution est donc donnée par :

$$u(x,t) = \ \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \tag{2.3}$$

pour $\alpha = 1$, on trouve par exemple comme solution la dérivées de la Gaussienne

### 2.1.2 Méthode de diminution de l'ordre

On suppose que que la fonction $\phi$ est une distribution tempérée c'est à dire

$$\phi \ \epsilon \ L^1(R)$$
$$\phi\text{''}, \ x\phi', \ \rightarrow 0 \quad \text{si } |x| \rightarrow +\infty$$

l'idée comme elle a été expliquée en cours est d'intégrer l'équation $\alpha\phi - \frac{1}{2}\xi\phi_\xi = \phi_{\xi\xi}$ entre $-\infty$ et $x$ et par intégration par partie du terme gauche on obtient

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

Ce qui donne

$$\phi(\xi) = \ Ke^{\frac{-\xi^2}{4}} \text{avec} \qquad \phi \ \epsilon \ L^1(R)$$

## 2.2 Problèmes aux limites:

On peut aussi chercher le parametre $\alpha$ selon le problème aux limites

Considérons le problème suivant;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(x,t) \to 0, \text{ pour } |x| \to +\infty \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = K, & \text{pour } 0 < t \end{cases} \tag{2.4}$$

dans ce cas si on veut chercher la solution sous la forme $u(x,t) = t^{\alpha}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, les conditions du problèmes donnent

$$\phi(\infty) = 0$$

de même $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = t^{\alpha-\frac{1}{2}}\phi'(0) = K$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}$, et l'équation devient

$$\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\xi\phi_{\xi} = \phi_{\xi\xi}$$

difficile de trouver une solution explicite pour cette équation, elle doit être résolue numériquement.

Par contre si on prend le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(x,t) \to 0, \text{ pour } |x| \to +\infty \\ u(0,t) = Q, & \text{pour } 0 < t \end{cases} \tag{2.5}$$

les conditions du problèmes donnent $\phi(\infty) = 0$ et $u(0,t) = t^{\alpha}\phi(0) = Q$, constant, ce qui donne $\alpha = 0$, et l'équation devient

$$-\frac{1}{2}\xi\phi_{\xi} = \phi_{\xi\xi}$$

la résolution de cette équation donne $\phi(\xi) = C\,\mathrm{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{4}}\right) + C_0$

### Condition suplémentaire

S'il existe une autre condition supplémentaire, on peut trouver explicitement les deux paramètres $\alpha$ et $\beta$.

**Exemple 2.2.1** *soit le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \delta(x), & x > 0 \\ u(x,t) \to 0, \ \textit{pour} \ |x| \to +\infty \\ \int u(x,t) = 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans ce cas on aura

$$\int u(x,t) = 1 \Longrightarrow t^{\alpha+\beta} \int \phi(x) = 1 \Longrightarrow \alpha = -\beta \tag{2.7}$$

l'équation dans (2.6) devient

$$-\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\xi\phi_\xi = \phi_{\xi\xi}$$

cela donne

$$-\frac{1}{2}(\xi\phi)_\xi = \phi_{\xi\xi}$$

d'où

$$\phi\left(_\xi\right) = Ce^{\frac{-\xi^2}{4}} + C_0$$

et la solution du problème (1.2) s'écrit comme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

**Exemple 2.2.2**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x}), \\ u(x,0) = \delta(x), & x > 0 \\ u(x,t) \to 0, \ \textit{pour} \ |x| \to +\infty \\ \int u(x,t) = 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

après calcul , on trouve les deux relations $2\beta - \alpha = 1$ et $\alpha = -\beta$ ce qui donne $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

pour l'équation différentielle

$$-\frac{1}{3}\phi - \frac{1}{3}\xi\phi_\xi = (\phi\phi_\xi)_\xi$$

cela donne

$$-\frac{1}{3}(\xi\phi)_\xi = (\phi\phi_\xi)_\xi$$

d'où

$$\phi\left(_\xi\right) = -\frac{1}{6}(\xi^2 + C_0$$

pour avoir une solution qui vérifie les conditions du problème ; on l'écrit sous la forme

$$\phi\left(_\xi\right) = \frac{1}{6}(A^2 - \xi^2) \text{ si } A^2 > \xi^2 \text{ et nulle ailleurs}$$

**Exercice 2.2.1** *On veut chercher la solution des équations suivantes sous la forme* $u(x,t) = t^\alpha\phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$

A. $\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}$, B. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$, C. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}(u^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x})$, D. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, E. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $n \;\epsilon N$ F. $\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, G. $\frac{\partial u}{\partial t} = u^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, m \;\epsilon R$

1- Trouver les conditions d'invariance d'échelle (similarité)

2- Trouver la relation entre $\alpha$ et $\beta$.

3. Trouver la fonction $\phi$ si c'est possible.

On peut ajouter la condition (2.7) pour toutes les équations.

# Chapitre 3

# Solutions auto similaires générales

On veut maintenant chercher des solutions sous la forme plus générale

$$u(x,t) = c(t)\,\phi\left[\frac{x}{a(t)}\right],\ a,\ c \in \mathbb{R}^{+} \tag{3.1}$$

,

Le but est de trouver les paramètres $c(t)$ **et** $a(t)$ et la fonction $\phi$.

## 3.1 Problème de la chaleur:

Soit l'équation de la chaleur suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \tag{3.2}$$

**Théorème 3.1.1** *La fonction*

$$u(x,t) = c(t)\,\phi(\eta),\ \ avec\ \eta = \frac{x}{a(t)},\ a(t),\ c(t) > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

*est une solution exacte du problem (3.2), si le profile de base $\phi$ est solution de l'équation différentielle suivante*

$$(\phi)''_{\eta\eta} = \alpha\phi + \beta\eta\phi'_{\eta}, \qquad où\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

*dans ce cas les coefficients $c(t), a(t)$ sont déterminés par le système suivant:*

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c} & = \frac{1}{a^2}\alpha \\ \frac{\dot{a}}{a} & = -\frac{1}{a^2}\beta \end{cases}. \tag{3.4}$$

Si on remplace la solution de la forme (3.1) dans l'équation de la chaleur (3.2); on obtient

,

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\phi - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\eta\phi'_{\eta} = \frac{1}{a^{2}(t)}(\phi)''_{\eta\eta}, \tag{3.5}$$

par principe de séparation de variables on obtient le système (3.3)-(3.4).

### 3.1.1 Résolution du système differentiel;

Au bord , on impose les conditions suivantes;

$$a(0) = 1,\ c(0) = 1,\ b(0) = 0, \tag{3.6}$$

d'aprés le système (3.4) , on obtient

$$\left\{ c(t) = a(t)^{\frac{-\alpha}{\beta}} \right. , \tag{3.7}$$

si on remplace (3.7) dans (3.4) ; on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = (1-2\alpha t)^{\frac{1}{2}}, \\ c(t) = (1-2\alpha t)^{\frac{-1}{2}} \end{array} \right. ,\ 0 < t < T, \tag{3.8}$$

## 3.2

## 3.3 Problème de la chaleur non linéaire (porous media):

Soit l'équation de la chaleur non linéaire suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m), \tag{3.9}$$

**Théorème 3.3.1** *La fonction*

$$u\,(x,t) = c\,(t)\,\phi\,(\eta)\,,\ \ avec\ \eta = \frac{x}{a\,(t)},\ \ a\,(t)\,,\ \ c\,(t) > 0,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

*est une solution exacte du problem (3.9), si le profile de base $\phi$ est solution de l'équation différentielle suivante*

$$(\phi^m)''_{\eta\eta} = \alpha\phi + \beta\eta\phi'_\eta, \qquad où\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, m > 1 \tag{3.11}$$

*dans ce cas les coefficients $c\,(t)\,, a\,(t)$ sont déterminés par le système suivant:*

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c} & = \frac{c^{m-1}}{a^2}\alpha \\ \frac{\dot{a}}{a} & = -\frac{c^{m-1}}{a^2}\beta \end{cases}. \tag{3.12}$$

**Preuve.**

Si on remplace la solution de la forme (3.10) dans l'équation (3.11); on obtient ,

$$\frac{\dot{c}}{c}\phi - \frac{\dot{a}}{a}\eta\phi'_{\eta} = \frac{c^{m-1}}{a^2}(\phi^m)''_{\eta\eta}, \tag{3.13}$$

■

par principe de séparation de variables on obtient le système (3.11)-(3.12).

### 3.3.1 Résolution du système différentiel;

Au bord , on impose les conditions;

$$a(0) = 1,\ c(0) = 1,\ b(0) = 0, \tag{3.14}$$

On peut voir d'aprés le système (3.12) , on peut obtenir

$$\left\{ c(t) = a(t)^{\frac{-\alpha}{\beta}} \right. , \tag{3.15}$$

si on remplace (3.15) dans (3.12) ; on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{1}{A}}, \\ c(t) = (1 - A\beta t)^{\frac{-\alpha}{\beta A}} \end{array} \right. ,\ 0 < t < T, \tag{3.16}$$

**Exercice 3.3.1** *Trouver la solution des équations suivantes sous la forme*

$$u(x,t) = \ c(t)\phi\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

A. $\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}$, B. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$, C. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, D. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, $n\ \epsilon N$ E. $\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, F. $\frac{\partial u}{\partial t} = u^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, m\ \epsilon R$

1- Trouver les conditions d'invariance d'échelle (similarité)

2- Trouver la relation entre $\alpha$ et $\beta$.

3. Trouver la fonction $\phi$ si c'est possible.

On peut ajouter la condition (2.7) pour toutes les équations.

**Réferences**

[1] Barenblatt, G.I. Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics, *Consultants Bureau, New york*, (1979).

[2] P.L. Sachdev · Ch. Srinivasa Rao, Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC (2010).

[3] V´azquez, J.L, The porous medium equation Mathematical Theory, *Clarendon Press . OXFORD*, (2007).