CHAPITRE 2 : Fonctions Elémentaires

2.1Fonctions homographiques

Fonctions rationnelles : Une fonction rationnelle est une fonction complexe de la forme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont deux polynômes avec $Q(z) \neq 0$.

Le cas particulier $f\ (z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ est appelée fonction homographique.

2.2Fonctions exponentielle

La fonction exponentielle est définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

2.2.1Formule d'Euler :

Si on considère le cas où $z = iy$ avec $y \in \Re$, alors e^{iy} s'écrit sous une forme très intéressante :

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

Et en utilisant le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus, on obtient la fameuse formule d'Euler d'où :

$$\boxed{\forall y \in \Re : \quad e^{iy} = cosy + isiny}$$

Donc la fonction exponentielle peut être écrite comme :

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x cosy + ie^x siny$

D'où on a $Re(e^z) = e^x cosy = P(x,y)$ $\ et\ $ $Im(e^z) = e^x siny = Q(x,y)$

On peut vérifier les conditions de Cauchy Riemann, et on trouve que la dérivée de la fonction exponentielle est :

$$\forall z \in \mathbb{C} : (e^z)' = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x cosy + ie^x siny = e^x(cosy + isiny) = e^{x+iy} = e^z$$

2.3 Fonctions Hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies par les relations suivantes :

- ***sinus hyperbolique*** : $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- ***cosinus hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- ***tangente hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ \ z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$: $thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$
- ***cotangente hyperbolique*** : $\forall z \in \mathbb{C}\ \ z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\ cothz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$

Les propriétés suivantes sont également vérifiées, en passant directement à l'exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C}: \qquad ch^2 z - sh^2 z = 1$$

$$ch(-z) = chz \qquad sh(-z) = -shz$$

$$ch(z + i\pi) = -chz \qquad sh(z + i\pi) = -shz$$

$$ch\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ishz \qquad sh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = ichz$$

- Les fonctions hyperboliques sont holomorphes et leurs dérivées sont données par :

$$(shz)' = chz \quad et \quad (chz)' = shz \quad \text{et} \quad (thz)' = \frac{1}{ch^2 z}$$

2.4 Fonctions Trigonométriques

On peut définir les fonctions trigonométriques ou circulaires, en utilisant les fonctions exponentielles et la formule d'Euler, de la manière suivante :

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad et \quad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$tgz = \frac{sinz}{cosz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad et \quad cotgz = \frac{cosz}{sinz} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad z \neq \pi + k\pi$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes

$$\sin(iz) = ishz \qquad sh(iz) = isinz \qquad \cos(iz) = chz \qquad ch(iz) = cosz$$

$$\text{tg}(iz) = ithz \qquad th(iz) = itgz \qquad \text{cotg}(iz) = -icothz \qquad cohth(iz) = cotgz$$

Remarque :

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore vérifiées dans le cas complexe, par exemple : $\forall z \in \mathbb{C}$: $\quad sin^2 z + cos^2 z = 1$

$$sin(z+z') = sinzcosz' + coszsinz'$$

$cos(z+z') = \; coszcosz' = sinzsinz' \quad \ldots\ldots etc.$

Par contre pour $z \in \mathbb{C}$, on peut avoir $|sinz| > 1 \quad ou \; |cosz| > 1$

2.5 Fonction Logarithme complexe

On appelle détermination du logarithme de z un nombre complexe t tel que $t = logz \Leftrightarrow z = \; e^t$ définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall z \neq 0 \quad Logz &= ln|z| + iargz \\ &= ln|z| + iArgz + i2\pi k \qquad k \in \mathbb{C} \end{aligned}}$$

On remarque que $Logz$ est une fonction multiforme (cette fonction possède une infinité de déterminations).

Le nombre $ln|z| + iArgz \; (-\pi \; \leq Argz < \pi)$s'appelle souvent ***La détermination principale de*** $logz$.

La fonction est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^t.

Exemples :

- $Log(i) = ln|i| + iarg(i) = ln1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, alors La détermination principale de $\log(i) \; est \; i\frac{\pi}{2}$.
- $Log(1+i) = ln|1+i| + iarg(1+i) = \frac{1}{2}ln2 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$,

  Donc La détermination principale de $\log(1+i) \; est \; \frac{1}{2}ln2 + i\frac{\pi}{4}$.

2.6 Fonction Puissance

C'est une fonction complexe de la forme $f(z) = z^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, et définie comme :

$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha Logz}$

Nous pouvons définir $f\,(z)^{g(z)} = e^{g(z)Logf(z)}$ .En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple :

$$i^{-i} = e^{-iLogi} = e^{-i(ln|i|+iarg(i))} = e^{-i(i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

Alors La détermination principale de$i^{-i} \; est \; e^{\frac{\pi}{2}}$

2.7 Fonctions trigonométriques inverses

Si $z = sin\ t$ alors $t = arc\ sin\ z$ est appelée la fonction inverse de $sin\ z$ ou $arc\ sinus\ de\ z$. De la même façon on peut définir d'autres fonctions trigonométriques inverses $arcos\ z, arctg\ z, etc$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$arc\ sin\ z = \frac{1}{i} Log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad arc\ cos\ z = \frac{1}{i} Log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$arc\ tg\ z = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad arc\ ctg\ z = \frac{1}{2i} Log\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

2.7 Fonctions hyperboliques inverses

Si $z = sh\ t$ alors $t = arg\ sh\ z$ est appelée la fonction inverse de $sinus\ hyperboliques$. De la même façon on peut définir d'autres fonctions inverses des fonctions hyperboliques $argch\ z, argth\ z, etc$. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme

$$argsh\ z = Log\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad argch\ z = Log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$argth\ z = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad argcoth\ z = \frac{1}{2} Log\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$$